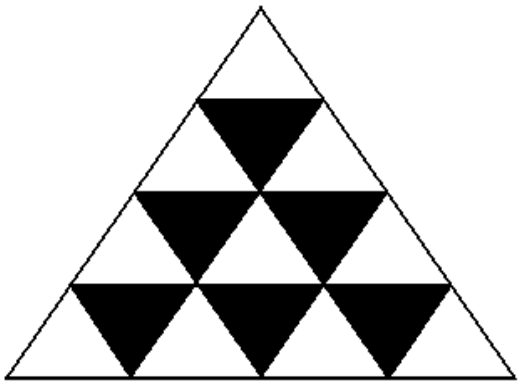
National Committee of Ukraine by Theoretical and Applied Mechanics
Higher School Academy of Sciences of Ukraine
Taras Shevchenko National University of Kyiv
Institute of Mathematics of NAS of Ukraine
Institute of Mechanics of NAS of Ukraine
Institute of Cybernetics of NAS of Ukraine
Kiev National Economic University named after V. Hetman
National Technical University of Ukraine "Kyiv Polytechnic Institute".

XVII International Conference

DYNAMICAL SYSTEM MODELLING AND STABILITY INVESTIGATION



MODELLING & STABILITY

ABSTRACTS OF CONFERENCE REPORTS
Kiev, Ukraine

May 27 - 29, 2015

ВІСНИК
Київського національного університету імені Тараса Шевченка

The various aspects of theoretical and applied researches are represented in abstracts of conference reports. Problems of adequate mathematical model of studied processes are considered.
Problems of control synthesis and stability investigation of movements are separately allocated. Significant numbers of papers are devoted to modeling of economic problems, biological and social phenomena. Big quantity of reports resented at the conference is devoted to the problems of applied mechanics.Logic-mathematical methods of modeling are considered.
Prepared by Sirenko A.S.
Recommended for printing by Scientific
Council of Cybernetics faculty of Kiev University.
Scientific Editor: doctor of physical and mathematical sciences
Khusainov D.Ya.
Reviewer: doctor of physical and mathematical sciences
BoychukA.A.
В тезисах докладов конференции представлены различные аспекты теоретических и прикладных исследований. Рассмотрены вопросы создания математических моделей, адекватно описывающих исследуемые объекты.
Отдельно рассмотрены проблемы синтеза управления и исследования устойчивости движения. Значительное количество работ связано с моделированием экономических, биологических и социальных процессов. Большое количество работ посвящено проблемам теоретической и прикладной механики. Рассмотрены логико-математические методы моделирования.
Подготовлено Сиренко А.С.
Рекомендовано к печати Ученым Советом факультета кибернетики Киевского национального университета им. Тараса Шевченко
Научный редактор:доктор физ.-мат. наук
Хусаинов Д.Я.
Рецензент: доктор физ.-мат. наук
Бойчук А.А.
В тезах доповідей конференції представлено різні аспекти теоретичних та прикладних досліджень. Розглянуто питання створення математичних моделей, що адекватно описують об’єкти.
Окремо розглянуто проблему синтезу керування та дослідження стійкості руху. Значна кількість праць пов’язана із моделюванням економічних, біологічних та соціальних процесів. Велика кількість праць присвячена проблемам теоретичної та прикладної механіки. Розглянуті логіко-математичні методи моделювання.
Підготовлено Сіренко А.С.
Рекомендовано до друку Вченою Радою факультету кібернетики Київського національного університету ім. Тараса Шевченка
Вчений редактор: доктор фіз.-мат. наук
Хусаінов Д.Я.
Рецензент: доктор фіз.-мат. наук
Бойчук О.А.

УДК 519.8+531/534+316.4+33(063)
ББК 22.1+22.2+65
D 98

ISBN 978-617-571-116-3

During the period May 27–29, 2015 the traditional international conference "Dynamical Systems Modeling and Stability Investigation" was held.The members of committees were

SCIENTIFIC COMMITTEE

Aliev F. (Baku, Azerbaidzhan),
Andreev A.S. (Ulyanovsk, Rusia),
Babaev A.E. (Kyiv, Ukraine),
Bastinec J. (Brno, Czech Republic),
Boychuk A.A. (Kyiv, Ukraine),
Chikrii A.O. (Kyiv, Ukraine),
Diblik J. (Brno, Czech Republic),
Demidenko G.V. (Novosibirsk, Russia),
Domoshnitsky A. (Ariel, Israel),
Gyori I. (Vesprem, Hungary),
Ivanov A.F. (Penn State, U.S.A.),
Kalitin B.S. (Minsk, Belorussia),
Karandzhulov L.I. (Sofia, Bulgaria),
Kubenko V.D. (Kyiv, Ukraine),
Makarov V.L. (Kyiv, Ukraine),
Martinyuk A.A. (Kyiv, Ukraine),
Müller W.H. (Berlin, Germany),
Popusha O.M. (Murmansk, Russia),
Redko V.N. (Kyiv, Ukraine),
Ruzickova M. (Zilina, Slovak Republic),
Shmeidel E. (Byalystok, Poland),
Vasiliev S.N. (Moscow, Russia),
Zuev A.L. (Donetsk, Ukraine).

ORGANIZING COMMITTEE

Bychkov O. (Kyiv, Ukraine),
Chernii D.I (Kyiv, Ukraine),
DzhalladovaI.A.(Kyiv,Ukraine,Vice Chairman),
Grygorenko A.Ya. (Kyiv, Ukraine),
Kapustyan O.I. (Kyiv, Ukraine),
Kashpur O.F. (Kyiv, Ukraine),
Khusainov D.Ya. (Kyiv, Ukraine, Chairman),
Liashenko O. I. (Kyiv, Ukraine),
Limarchenko O.S. (Kyiv, Ukraine),
Mazko A.P. (Kyiv, Ukraine),
Nikitchenko N.S. (Kyiv, Ukraine),
Onyshchenko S.M. (Kyiv, Ukraine),
Podchasov N.P. (Kyiv, Ukraine),
Shatyrko A.V (Kyiv, Ukraine, Vice Chairman),
Sirenko A.S. (Kyiv, Ukraine, Secretary),
Shkilniak S.S. (Kyiv, Ukraine),
Shvets A.Yu. (Kyiv, Ukraine),
Zhuk Ya. A. (Kyiv, Ukraine).

First conferences "*Dynamical Systems Modeling and Stability Investigation*" were embarrassed by narrow frames of stability theory and dynamical processes under superconductivity conditions. But taking into account the growing interest to the conference, organizers have extended the subject, which consists of five topics: "System Investigation", "System Modeling", "Mechanical Systems", "Control and Optimization", "Programming and Logic-mathematical Methods".

The **"Mathematical methods of system investigation"**, the first topic, is connected to mathematical studies of dynamical system investigation, described by different types of equations (differential, functional), and mathematical modeling instrument development problems.

The **"Methods and technologies of computer modeling"** topic considers the wide spectrum of mathematical modeling in physical, technological and biological processes. The reports about stability in superconducting systems, technological processes investigation, financial and economical models are presented.

The **"Modeling and investigation of processes in mechanics"** topic presents modern researches on aerohydroelastic problems, composite materials mechanics, elasticity theory, plasticity, destruction, bounded fields theory and theoretical mechanics.

The **"Method of control and complex systems research"** topic presents mathematical problems of controlling technical and physical systems. The significant attention is devoted to control problems in mechanical systems.

The **"Logic-mathematical methods of modeling"** topic aims to present new results in subject domain specification, programming system development, logic of dynamic system modeling.

The **"Modeling in Economy and Ecology"** topic aims to present new results in presents modern researches of economy and ecology modeling.

The Conference covers the following topics:

The**"Mathematical methods of system investigation"**is connected to mathematical studies of dynamical system, described by different types of equations (difference, differential, functional), and mathematical modeling instrument development problems:
Investigation of differential, functional-differential and difference systems.
Investigation of system stability, controllability and optimization.
Bifurcations and chaos in dynamical systems.
Lyapunov's methods in system investigation.
The**"Methods and technologies of computer modeling"**considers the wide spectrum of mathematical models in physical, technological and biological processes. The reports about stability in superconducting systems, technological processes investigation, financial and economical models are presented:
Numerical Methods of Mathematical Physics.
Method and Technology computer calculations.
Specialized software and systems.
Software and Systems Modeling.
`The**"Modeling and investigation of processes in mechanics"**presents modern researches on aerohydroelastic problems, composite materials mechanics, elasticity theory, plasticity, destruction, bounded fields theory and theoretical mechanics:
Mathematical modeling in composite materials of mechanics.
Modeling and investigation of dynamical processes in elastic and hydroelastic systems.
Mathematical modeling in connected fields of mechanics.
The**"Method of control and complex systems research"**topic presents mathematical problems of controlling technical and physical systems. The significant attention is devoted to control problems in mechanical systems:
Methods of control and optimization.
The continuous-discrete systems
Methods of differential games.
Fuzzy modeling and systems with uncertainty
The**"Logic-mathematical methods of modeling"**topic aims to present new results in subject domain specification, programming system development, logic of dynamic system modeling:
Methods and tools of subject domains specifications.
Methods and tools of software systems description.
Modal and temporal formalisms of systems modeling.
The**"Modeling in Economy and Ecology"** topic aims to present new results in presents modern researches of economy and ecology.modeling:
System modeling of dynamic processes in the economy.
Mathematical modeling of ecosystems.
Mathematical modeling of social processes.

CONTENTS

1. MATHEMATICAL METHODS OF SYSTEM INVESTIGATION 12

Borysenko O.D., Borysenko O.V. - Averaging method for the third order random oscillating system 13

Diblik J., Halfarová H., Šafarik J. - Representation of solutions of weakly delayed planar linear discrete systems 14

Dmitrieva I.Yu. - Analytical - study of the differential maxwell system as electrodynamic mathematical modeling 16

Gaiko V.A. - Bifurcations of limit cycles in low-dimensional polynomial dynamical systems 17

Hentosh O.Ye. - The Lie-algebraic structure of bi-Hamiltonian two-dimensional differential-difference systems 18

Ivanov A.F. -Periodic solutions of a class of differential delay equations 19

Pokojovy M., Khusainov D., Racke R. - Linear heat equation with delay: ill-posedness vs. well-posedness and long-time behavior 20

Shvets A.Yu., Makaseyev A.M. - The influence of delay factors inpendulum systems with limited excitation 21

Авдеева Т.В., Ильичева Л.М. - Обобщенная модель системы массового обслуживания при ограничениях на значения интенсивностей 22

Азизбеков Э.И. - Об одном численно-аналитичесом методе нахождения решений уравнения второго порядка с запаздыванием 23

Айсагалиев С.А., Абенов Б.К., Аязбаева А.М. - К абсолютной устойчивости регулируемых системв критическом случае 24

Бащенко О.С. - Квадратичні фільтри для стохастичних процесів 25

Буряк Д.В., Крапива Н.В. - Существование периодического решения одной системы дифференциальных уравнений первого порядкас функциями Ляпунова 26

Бычков А.С. - Исследование устойчивости по части переменных габридных автоматов 27

Венгерський П.С., Коковська Я.В. - Про математичні моделі стоку мілкої води в наближенні кінематичної хвилі 28

Гриценко Г.Е. - Проблема всемирного тяготения и отталкивания 29

Жуматов С.С. - Неустойчивость нелинейных управляемых систем в окрестности программного многообразия 30

Журавлев В.Ф. - Линейные краевые задачи для нормально разрешимых операторных уравнений в Банаховом пространстве 31

Клевчук І.І. - Біфуркація автоколивань параболічних систем із запізнюючим аргументом та малою дифузією 32

Ковальчук В.В. - До питання про граничні цикли маятникової системи зі слідкуючою силою 33

Гладун В.Р., Матулка К.В. - Про збіжність та стійкість до збурень гіллястих ланцюгових дробів з додатними частинними чисельниками та знаменниками 34

Мороз А.М. - Исследование динамики модели процесса распространения заболевания 35

Мусурівський В.І., Ясинський В.К. - Проблема стабілізації керованих стохастичних дифереціально-функціональних систем із скінченним запізненням. 36

Зуев А.Л., Новикова Ю.В. - Оценка множества достижимости бесконечномерной

колебательной системы с несоизмеримыми частотами 37

Нікітін А.В., Баляснікова О.А. - Стійкість лінійних систем диференціальних рівнянь з випадковими лінійними стрибками розв'язків у Гільбертових просторах 38

Ободан Н.И., Гук Н.А., Фещенко А.С. - Коэффициентная обратная задача для точекветвления уравнения Кармана 39

Онищук В.В. - Розв'язок, інтерпретація і практичне використання теореми Берча - Свіннертон-Дайєра....40

Осипова О.В., Черевко І.М. - Декомпозиція різнотемпових лінійних сингулярно збурених систем методом інтегральних многовидів....41

Полетаев Г.С. - Подвид двучленных двупроекторных первого порядка уравнений с правильно факторизуемыми по паре подколец коэффициетнтами 42

Савченко Н.В., Пузырев В.Е. - Построение функции Ляпунова для модельной системы в критическом случае чисто мнимых корней....43

Скрипник Н.В. - Усреднение импульсных дифференциальных включений с нечеткой правой частью....44

Слюсарчук В.Ю. - Майже періодичні розв'язки нелінійних функціонально-диференціальних рівнянь....45

Слюсарчук Л.М. - Асимптотична періодичність і стійкість розв'язків нелінійних диференціально-різницевих рівнянь 46

Сиренко А.С. - Исследование устойчивости слабо нелинейных разностных систем с запаздыванием....47

Тарасенко О.В. - Про асимптотику розв'язку однієї задачі оптимального керування з виродженням 48

Тингаев А.А. - Существование ограниченных решений квазилинейного дифференциально-операторного уравнения....49

Ферук В.А., Козлова Н.О. - Нетерові крайові задачі для інтегральних рівнянь....50

Ходневич Я.В. - Верифікація обчислювального алгоритму для визначення кінематичних характеристик водного потоку в локальній тривимірній області у природному руслі 51

Хорошун А.С. - О стабилизации верхнего положения равновесия маятника вращением инерциального маховика....52

Черепенников В.Б. - Метод полиномиальных квазирешений в теории линейных функционально-дифференциальных уравнений....53

Чуйко С.М., Сысоев Д.В. - Нелинейная матричная краевая в случае параметрического резонанса....54

Чуйко С.М., Чуйко Е.В. - О псевдорешениях матричных нетеровых краевых задач 55

Чуйко С.М., Несмелова (Старкова) О.В. - Периодическая краевая задача для уравнения льенарав случае параметрического резонанса 56

Шамолин М.В. - Обзор случаев интегрируемости в многомерной динамике неконсервативных систем....57

Шатирко А.В. - Прямий метод Ляпунова в проблемі абсолютної стійкості нелінійних систем регулювання з відхиленням аргументу....58

Швець О.Ф., Сопронюк О.Л. - Числовий аналіз чутливості параметричних систем зі змінною вимірністю фазового простору матричними методами 59

Шевчук Ю.М. - Комп'ютерне моделювання в моделях інформаційного протиборства 60

2. METHODS AND TECHNOLOGIES OF COMPUTER MODELING 61

Maltsev V., Pokojovy M. - On a nonlinear hyperbolic-like filter for image processing 62

Mayko N.V., Ryabichev V.L. - The error estimate of the finite-difference scheme for a two-dimensional parabolic equation with allowance for the effect of the boundary condition 63

Антонов В.М. - Кіберакмеологічне математичне моделювання та дослідження медико-біологічних процесів.....64

Башук О.О. - PHI-функції для конуса та півпростору,еліпсоїда та півпростору.....65

Вакал Є.С., Вакал Ю.Є., Садова М.Ю. - Математичне дослідження механізму сорбціїв задачах міграції забруднень.....66

Городецкий В.Г., Осадчук Н.П. - Реконструкция системы весслера с использованием метода перспективных коэффицентов.....67

Гук Н.А.; Ободан Н.І.; Магас О.С. - О корректности нейросетевой аппроксимации решений обратных задач для уравнений типа кармана.....68

Кашпур О.Ф. - Про інваріантну розв'язуваність задачі інтерполяції функції двох змінних 69

Кубайчук О.О., ВовкодавН.І., Кривець Т.О. - ARIMA моделі та покрокова регресія в MS EXCEL.....70

Махно М.Ф., Савеленко М.С. - Метод вирішення оберненої задачі розподілуресурсів мережевих серверів.....71

Нестеренко Б.Б., Новотарський М.А. - Моделювання руху рідин в біологічних об'єктах 72

Олійник А.П., Райтер П.М. - Математичне моделювання течії вязкої рідини в газорідинних свердловинних потоках 73

Пашко А.О. - Розвязування задач будівельної механіки методами статистичного моделювання ...74

Петрович В.М., Требіна Н.М. - Задача про моделювання та аналіз динаміки технологічного процесу виділення цукрози з розчину.....75

Проскуряков Р.О. - ВЕБ-приложение для численного моделирования на базе МКЕ.....76

Ройбул П.А. - Математическая модель электродинамики подвеса вагона с учетом аэродинамических сил.....77

Тимофієва Н.К. - Про подібність динамічних задач комбінаторної оптимізації.....78

Янчевський І.В. - Вісесиметричні коливання незамкненої електропружної сферичної оболонки при імпульсному електромеханічному навантаженні.....79

Завадський І.О., Лавро В.М. - Вимоги до сучасних автоматизованих систем тестування.....80

3. MODELING AND INVESTIGATION OF PROCESSES IN MECHANICS 81

Cherniy D. - One case of the analytical solution of the Navier-Stokes equation 82

Maslov B.P., Klimuk A.N. - Composites creep modeling with fractional calculus 83

OnankoY.A., ProdayvodaG.T, OnankoA.P. - Automated system of numerical analysis and visualization of anisotropy ultrasonic measuring data.....84

Shyshkanova G.A. - Strength characteristics of elastic space with a doubly-connected flat crack under uniaxial tension 85

Авраменко Ю.А., Авраменко О.А. - Анализ влияния параметров ортотропии на напряженно деформированное состояние нетонких тороидальных оболочек.....86

Афанасов Е.Н., Кадыров С.Г. - Малые колебания твердого тела в вязкой несжимаемой жидкости 87

Бабич Д.В., Безверхий А.И., Дородных Т.И. - О долговечности пьезоэлектрическихэлементов конструкций 88

Бернакевич І.Є., Вагін П.П., Шот І.Я. - Аналіз стійкості оболонок, податливих дозсуву та стиснення 89

Георгиевский Д.В. - Эквивалентность системуравнений совместностив напряжениях в R^n 90

Глухов Ю.П., Галаган А.І. - Рівняння руху пластини при поверхневому навантаженні 91

Гололобов В.И. - Характеристики многоэлектродных пьезоэлементовпри гармонических колебаниях 92

Григоренко А.Я,. Ефимова Т.Л,. Коротких Ю.А. - Свободные осесимметричные колебания нетонких цилиндров из непрерывно неоднородных материалов с несимметричной структурой относительно срединной поверхности 93

Дашко О.Г. - Растяжение трансверсально-изотропной пластины при смешанных условиях на граничных плоскостях 94

Довжик М.В, Назаренко В.М. - Разрушение композитного материала при равномерном сжатии вдоль приповерхностной дискообразной трещины 95

Доник В.Д. - Моделирование и исследование процессов в отсеке при внезапной разгерметизации через отверстие типа «Пробка» или «Щель» 96

Дудик М.В., Кіпніс Л.А., Дякон В.М. - Про комплексну модель міжфазної тріщини з маломасштабним контактом берегів 97

Діхтяренко Ю.В., Дудик М.В., Дякон В.М. - Про зрушення тріщини нормального відриву з вершиною у кутовій точці ламаної межі поділу двох матеріалів 98

Егоров П.А., Янютин Е.Г. - Неустановившиеся колебания шарнирно-опертой пластины, подкрепленной линейными ребрами жесткости 99

Жук Я.О., Васильєва Л.Я. - Активний контроль коливань шаруватих тонкостінних елементів конструкцій з п'єзоактивними шарами 100

Карнаухов В.Г., Козлов В.И., Карнаухова Т.В. - Активное демпфирование неупругой конической панели при помощи пьезоэлектрических сенсоров и актуаторов 101

Коваленко А.П., Шекера М.К. - Применение численного преобразования Лапласа-Карсона при математическом моделировании переходных процессов в системе полубесконечная цилиндрическая оболочка-жидкость 102

Кучер Ю.І. - Asymptotic distribution of the spectral parameter in the stabilization problem for a beam system 103

Назаренко В.М., Кіпніс О.Л. - Про інтенсивність напружень біля кінця внутрішньої півнескінченної тріщини у біоднорідній площині 104

Лакиза В.Д. - Исследование нелинейных процессов деформированиякомпозитных цилиндрических оболочек с заполнителемпри различных типах вибровозбуждениях 105

Лакиза В.Д., Крук Л.А. - О колебаниях композитных цилиндрических оболочекс жидкостным и сыпучим заполнителем. 106

Михаськів В.В., Кунець Я.І., Матус В.В. - Усереднені характеристики SH-хвиль у волокнистих композитах за наявності тонких міжфазнихпружних включень 107

Незамай Б.С., Попович О.М. - Модель впливу експлуатаційних навантажень на ділянку магістрального газопроводу з локальною зміною форми осі 108

Пантелят М.Г., Гуренцов Ю.В., Трофімов А.В. - Моделювання методом скінчених елементів електромагнітнихі теплових полів в індукційних кухонних плитах 109

Подчасов Н.П. - Неустановившиеся колебания цилиндрической оболочки, взаимодействующей с внешним и внутренним потоками жидкости, при гармонических финитных возмущениях скорости внутреннего потока 110

Поліщук Т.В., Камінський А.О., Кіпніс Л.А. - Пружнопластична задача для біоднорідної площини з внутрішньою півнескінченною тріщиною 112

Сандраков Г.В. - Осреднение некоторых решений уравнений Навье-Стокса с малой вязкостью .113

Сандраков Г.В. - Homogenized multiphase models for composite materials....114

Сметанкіна Н.В., Сметанкін В.О. - Modeling of acoustic fields of hydrodynamic radiators with sound waves attenuation 115

Сінчило С.В., Савельєва К.В., Симчук Я.В. - Анализ квадратично нелінійної гіперпружньоїциліндричної хвилі при третьому наближенні 116

Ткаченко Н.Є. - Рух дрібнодисперсної суміші під дією гармонічного збудження 117

Троценко Ю.В. - Особенности применения метода Ритца к решению задачи о собственных колебаниях тонкостенных куполообразных оболочек вращения 118

Утебаев Д., Утебаев Б.Д., Бекимбетов Б.А. - Исследование устойчивости разностных схем для нелинейных параболических задач 119

Феньків В.М., Діхтяренко Ю.В. -Розвиток зони крихкого передруйнування в околі вершини тріщини, що виходить у довільну напрямку з кутової точки ламаної межі поділу двох пружних середовищ 120

Хома І.Ю. - Про розв’язок рівнянь рівноваги електропружного трансверсально-ізотропного шару при змішаних умовах на торцях 121

Трач В.М., Хоружий М.М. - Стійкість нетонких анізотропних циліндричних оболонок із волокнистих композитів під дією зовнішнього тиску....122

Рущицький Я.Я., Хотенко О.О., Хотенко І.М. - До аналізу нелінійного рівняння Релея....123

Шпачук В.П., Чупрынин А.А., Гудзловенко Л.А. - К задаче моделирования ударного взаимодействия в дискретно-континуальной системе 124

Щепкіна Я.І., Декарчук М.В., Дудик М.В. – Про модель міжфазної тріщини з дислокаційно-подібною межею поділу матеріалів 125

Рущицький Я.Я., Хотенко О.О., Юрчук В.М. - До теорії поодинокої поверхневої хвилі Релея 126

4. METHOD OF CONTROL AND COMPLEX SYSTEMS RESEARCH....127

Chikrii G.Ts. - Time dilatation approach to analyze evolutionary games 128

Demchenko H., Diblik J., Khusainov D.Ya. - Optimal control by Lyapunov's direct method 129

Diblík J., Bastinec J., Safarik J., Sirenko A.S. - Exponential stability of linear discrete systems with constant coefficients and single delay....130

Kopets M.M. - Оптимальное управление тепловым процессом с осевой симметрией....132

Алілуйко А.М., Єрьоменко В.О. - Робастна стійкість лінійних систем керування з матричними невизначеностями 133

Андреев А.С., Перегудова О.А. - Об управлении движением манипуляционных роботов на основе прямой и нелинейной обратной связей 134

Барановская Л.В. - The method of resolving functions for differential-difference pursuit game of neutral type....135

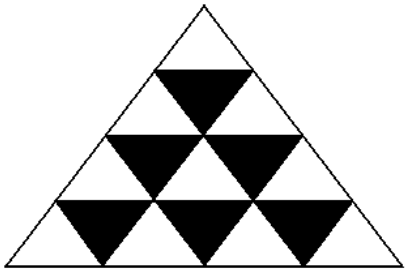
Белоусов А.А. - О линейных дифференциальных играх с выпуклыми интегральными ограничениями на управление....136

Ведель Я.І. - Узагальнення методу Попова для розв'язання задачі про рівновагу 137
Галкін О.А. - Побудова лінійних класифікаторів в контексті бінарної регресії 138
Гладун Л.В., Борисюк В. Ю. - Про оптимальні траєкторії руху цілком керованої системи при наявності перешкоди 139
Демыдюк М.В. - Оптимизация циклических транспортных операций манипуляционных систем с активными и пассивными приводами 140
Капустян О.А., Мазур О.К. - The optimal control problem for parabolic equation with non-local boundary conditions in circular sector 141
Леонтьева В.В., Кондратьева Н.А. - Наблюдение в непрерывной математической моделипозитивной динамической системы балансового типа 142
Мазко А.Г., Кусий С.Н. - Стабилизация и H_∞ - оптимизациялинейных систем управления 143
Малик І.В. - Стійкість напівмарковських випадкових еволюцій у схемі дифузійної апроксимації 144
Маслов Ю.Н. - Управляющие и соуправляющие технологии в сфере образования 145
Семенов В.В. - Новые алгоритмы для монотонных вариационных неравенств и задач о равновесии 146
Филер С.Е., Шелуденко А.С. - Устойчивость систем диференциальных уравнений 147
Ясинский В.К., Савчук Б.В. - Оптимальное управление в нелинейных стохастических дифференциально - функциональных уравнениях с Марковскими параметрами и внешними случайными возмущениями произвольной природы 148
5. LOGIC-MATHEMATICAL METHODS OF MODELING 149
Skobelev V.G. - On some problems of it-systems security 150
Буряк В.Д. - Ускоренный алгоритм исчисления порядка и оценка его эффективности при моделировании процессов систем защиты информации 151
Какойченко А.І. - Про розробку програмного комплексу для моделювання та аналізу динаміки строкового ринку 152
Кожаметов А.Т., Бабаджанов Э.С., Тайров К.Б. - Электронная ресурсная база для пользователей 153
Крак Ю.В., Тернов А.С., Ульянич Д.С. - Підхід до розпізнавання жестів у невеликих словниках 155
Мазурик Р.В, Шатирко А.В. - Дослідження напружено-деформованого стану просторових трубопровідних систем 156
Матвіюк Д.А., Нікітченко М.С. - Верифікація композиційно-номінативних програм 157
Нікітченко М.С., Шкільняк О.С., Шкільняк С.С. - Логіки квазіарних предикатів із узагальненимиреномінаціями та предикатами-індикаторами наявності значення для змінних 158
Россада Т.В. - Моделі знань з квазиарними відображеннями 159
Тлебалдинова А.С, Денисова Н.Ф., Крак Ю.В. - Алгоритм локализации и распознавания номерных знаков транспортных средств 160
Шатирко О.А. - Expert WEB-database with fuctional abilities for The World Bank Ukraine Office 161
Шевчук Р. П. - Інтернет портал для підтримки педагогічних досліджень методом семантичного диференціалу 162
Шкільняк О.С - Транзиційнімодальнілогікинемонотонних часткових 163
Шкільняк С.С., Волковицький Д.Б. - Безквантorні композиційно-номінативні логіки квазіарних предикатів 164
6. MODELING IN ECONOMY AND ECOLOGY 165

Koshmanenko V.D., Karataeva T.V. - Cyclic model of fire-water conflict 166
Vergunova I.M. - The method of optimization of agrotechnological schemes 167
Барановская Л.В. - Mechanism design in some voting as an optimization problem 168
Бойко Н. В. - Про один підхід щодо моделювання й управління портфелями IT проектів 169
Гаркуша Н.І. - Про одну математичну модель «хижак-жертва» без врахування вікової структури 170
Джалладова І.А. - Controllability of dynamical systems: threat models and cyber security 171
Дзюбановська Н. В. - Моделювання оптимальних стратегій ризик-менеджменту кредитної діяльності банку 172
Кожаметов А., Кутлымуратов Ю. - Эколого-экономическая модел задачи размещения и специализации сельскохозяйственного производства при дефицита водного ресурса 173
Коляда Ю.В., Трохановський В.І. - Динамічна модель економіки при сталості виробничих потужностей 175
Кулян В.Р., Юнькова О.О. - Ідентифікація параметрів моделей динаміки активів 176
Ляшенко О.І. - Моделі економічного зростання з навчанням на власному досвіді 177
Матвієнко В.Т. - Оптимізація термінального керування для дискретних систем 178
Махорт А.П. - Про вплив на рівновагу економічної системи наявності додаткового перерозподілу фінансових ресурсів 179
Олійник А.П., Клапоущак О.І. - До перевірки адекватності прогностичної моделіза критерієм Пірсона 180
Стефанишина-Гаврилюк Ю.Д., Стефанишин Д.В. - Ситуаційно-індуктивне моделювання за даними рядів динаміки 181
Стешенко Г.М., Верещинська В.В. - Управління інформаційними впливами в соціальних мережах 182
Чемісов Б.Г. - Виявлення факторної орієнтації територіально-виробничого утворення 183
Плаксій К.Ю., Міхлін Ю.В. - Дослідження динаміки неідеальної системи з нелінійним віброгасником в околі резонансу 185
Пантелят М.Г. - Finite Element Analysis of 2D and 3D Multiphysical Problems in Electrical Engineering 186

DYNAMICAL SYSTEMS MODELLING

AND STABILITY INVESTIGATION



MODELLING
&
STABILITY

Section 1

MATHEMATICAL METHODS OF

SYSTEMS INVESTIGATION

Borysenko Oleksandr Danylovych, Candidate Sci. (Phys.–Math.), Docent,
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine,
e-mail: odb@univ.kiev.ua;
Borysenko Olga Volodymyrivna, Candidate Sci. (Phys.–Math.), Docent,
National Technical University of Ukraine (KPI), Kyiv, Ukraine,
e-mail: olgaborisenko@ukr.net;

AVERAGING METHOD FOR THE THIRD ORDER RANDOM OSCILLATING SYSTEM

Borysenko O.D., Borysenko O.V.

In this talk we consider the behavior, as $\varepsilon \to 0$, of the general type third order autonomous oscillating system described by stochastic differential equation

$$x'''(t) + ax''(t) + b^2 x'(t) + ab^2 x(t) = \varepsilon^{k_0} f_0(x(t), x'(t), x''(t)) + f_\varepsilon(x(t), x'(t), x''(t))$$

with non-random initial conditions $x(0) = x_0, x'(0) = x_0', x''(0) = x_0''$, where $\varepsilon > 0$ is a small parameter, $f_\varepsilon(x, x', x'')$ is a random function such that

$$\int_0^t f_\varepsilon(x(s), x'(s), x''(s))ds = \sum_{i=1}^{m} \varepsilon^{k_i} \int_0^t f_i(x(s), x'(s), x''(s))dw_i(s) +$$

$$+\varepsilon^{k_{m+1}} \int_0^t \int_R f_{m+1}(x(s), x'(s), x''(s), z)\nu(ds, dz),$$

$k_i > 0, i = \overline{0, m+1}$; $f_i, i = \overline{0, m+1}$ are non-random functions; $w_i(t), i = \overline{1, m}$ are independent one-dimensional Wiener processes; $\tilde{\nu}(dt, dy) = \nu(dt, dy) - \Pi(dy)dt$, $E\nu(dt, dy) = \Pi(dy)dt$, $\nu(dt, dy)$ is the Poisson measure independent on $w_i(t), i = \overline{1, m}$; $\Pi(A)$ is a finite measure on Borel sets $A \in R$, $a > 0, b > 0$.

Let us consider the following representation of processes $x(t), x'(t), x''(t)$:

$$x(t) = C(t)e^{-at} + A_1(t)\cos(bt) + A_2(t)\sin(bt),$$
$$x'(t) = -aC(t)e^{-at} - bA_1(t)\sin(bt) + bA_2(t)\cos(bt),$$
$$x''(t) = a^2 C(t)e^{-at} - b^2 A_1(t)\cos(bt) - b^2 A_2(t)\sin(bt),$$
$$N(t) = C(t)\exp\{-at\}.$$

Using a change of time $t \to t/\varepsilon^k$, where $k = \min(k_0, 2k_1, \ldots, 2k_m, k_{m+1})$, we study asymptotic behavior of stochastic process $(N(t/\varepsilon^k), A_1(t/\varepsilon^k), A_2(t/\varepsilon^k))$, as $\varepsilon \to 0$. The non-autonomous system in the non-resonance and resonance cases also are investigated.

The dependence of coefficients of averaging system on order of small parameter in every term of considered oscillatory system is studied.

Autonomous and non-autonomous oscillating systems of third order under the action of small white noise and centered Poisson noise are studied in [1] - [2].

1.Borysenko O.D., Borysenko O.V. Limit behavior of autonomous random oscillating system of third order / O.D. Borysenko, O.V. Borysenko // Theory of Stochastic Processes. - 2007. - V. 13(29). - N.4. - P. 19-28.

2.Borysenko O.D., Borysenko O.V. Limit behavior of non-autonomous random oscillating system of third order under random periodic external disturbances in resonance case / O.D. Borysenko, O.V. Borysenko // Theory of Stochastic Processes. - 2008. - V. 14(30). - N.3-4. - P. 17-26.

Diblik Josef, prof. RNDr., DrSc.,
Brno University of Technology, Brno, Czech Republic,
e-mail: diblik@feec.vutbr.cz;
Halfarová Hana, Mgr., Ph.D.
Brno University of Technology, Brno, Czech Republic,
e-mail: halfarova.h@fce.vutbr.cz;
Šafarik Jan, Mgr.,
Brno University of Technology, Brno, Czech Republic,
e-mail: xsafar19@stud.feec.vutbr.cz;

REPRESENTATION OF SOLUTIONS OF WEAKLY DELAYED PLANAR LINEAR DISCRETE SYSTEMS

Diblik J., Halfarová H., Šafarik J.

We investigate the discrete planar systems

$$x(k+1) = Ax(k) + \sum_{l=1}^{n} B^l x(k-m_l) \tag{1}$$

where $m_1, m_2, \ldots, m_n$ are constant integer delays, $0 < m_1 < m_2 < \ldots < m_n$, $k \in Z_0^{\infty}$, $A, B^1, ..., B^n$ are constant 2×2 matrices, $A = (a_{ij})$, $B^l = (b_{ij}^l)$, $i, j = 1, 2$, $l = 1, 2, \ldots, n$, $B^l \not\equiv \Theta$, $l = 1, 2, \ldots, n$, Θ is 2×2 zero matrix and $x : Z_{-m_n}^{\infty} \to R^2$. Together with equation (1), we consider an initial (Cauchy) problem

$$x(k) = \varphi(k) \tag{2}$$

where $k = -m_n, -m_n+1, \ldots, 0$ with $\varphi : Z_{-m_n}^{0} \to R^2$. The *existence* and *uniqueness* of the solution of the initial problem (1), (2) on $Z_{-m_n}^{\infty}$ is obvious. We recall that the *solution* $x : Z_{-m_n}^{\infty} \to R^2$ of (1), (2) is defined as an *infinite sequence*

$$\{x(-m_n) = \varphi(-m_n), x(-m_n+1) = \varphi(-m_n+1), \ldots, x(0) = \varphi(0), x(1), x(2), \ldots, x(k), \ldots\}$$

such that, for any $k \in Z_0^{\infty}$, equality (1) holds. We consider the system (1) and look for a solution having the form $x(k) = \xi\lambda^k$ where $k \in Z_{-m_n}^{\infty}$, $\lambda = \text{const}$ with $\lambda \not\equiv 0$ and $\xi = (\xi_1, \xi_2)^T$ is a nonzero constant vector. The usual procedure leads to a characteristic equation

$$D := \det\left(A + \sum_{l=1}^{n} \lambda^{-m_l} B^l - \lambda I \right) = 0 \tag{3}$$

where I is the unit 2×2 matrix. Together with (1), we consider a system with the terms containing delays omitted

$$x(k+1) = Ax(k) \tag{4}$$

and its characteristic equation

$$\det(A - \lambda I) = 0. \tag{5}$$

The system (1) is called a weakly delayed system if the characteristic equations (3), (5) corresponding to systems (1) and (4) are equal, i.e. if, for every $\lambda \in C \setminus \{0\}$, $D = \det(A - \lambda I)$. We consider a linear transformation

$$x(k) = Sy(k) \tag{6}$$

with a nonsingular 2×2 matrix S. Then, the discrete system for y is

$$y(k+1) = A_S y(k) + \sum_{l=1}^{n} B_S^l y(k-m_l) \tag{7}$$

with $A_S = S^{-1}AS$, $B_S^l = S^{-1}B^l S$ where $l = 1, 2, \ldots, n$. If the system (1) is a weakly delayed system, then its arbitrary linear nonsingular transformation (6) again leads to a weakly delayed system

(7). A problem on analytic solutions of weakly delayed systems (1) is solved.

It is known that, for every matrix A, there exists a nonsingular matrix S transforming it to the corresponding Jordan matrix form Λ where Λ has four possible forms, depending on the roots of the characteristic equation (5), i.e. on the roots of

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0. \tag{8}$$

If (8) has two real distinct roots λ_1, λ_2, then the system (1) is weakly delayed only is either I) $b_{11}^{*l} = b_{22}^{*l} = b_{21}^{*l} = 0$, $b_{12}^{*l} \neq 0$ or II) $b_{11}^{*l} = b_{22}^{*l} = b_{12}^{*l} = 0$, $b_{21}^{*l} \neq 0$, $l = 1, 2, \ldots, n$.

Theorem Let (1) be a weakly delayed system and equation (8) has two real distinct roots λ_1, λ_2. If the case I) hold, then the solution of the initial problem (1), (2) is $x(k) = Sy(k)$, $k \in Z_{-m_n}^{\infty}$ where

$$y(k) = \varphi^*(k) \text{ if } k \in Z_{-m_n}^{0},$$

$$y(k) = \Lambda_1^k \varphi^*(0) + \sum_{r=0}^{k-1} \lambda_1^{k-1-r} [\sum_{l=1}^{n} b_{12}^{*l} \Phi_2(r - m_l)], \text{ if } k \in Z_1^{m_1+1},$$

$$y(k) = \Lambda_1^k \varphi^*(0) + \sum_{r=0}^{k-1} \lambda_1^{k-1-r} [\sum_{l=s+1}^{n} b_{12}^{*l} \Phi_2(r - m_l)] + \sum_{l=1}^{s} b_{12}^{*l} [\sum_{r=0}^{m_l} \lambda_1^{k-1-r} \Phi_2(r - m_l).$$

$$. + \Phi_2(0) \sum_{r=m_l+1}^{k-1} \lambda_1^{k-1-r} \lambda_2^{r-m_l}], \text{ if } k \in Z_{m_s+2}^{m_{s+1}+1}, s = 1, 2, \ldots, n-1,$$

$$y(k) = \Lambda_1^k \varphi^*(0) + \sum_{l=1}^{n} b_{12}^{*l} [\sum_{r=0}^{m_l} \lambda_1^{k-1-r} \Phi_2(r - m_l) .. + \Phi_2(0) \sum_{r=m_l+1}^{k-1} \lambda_1^{k-1-r} \lambda_2^{r-m_l}], \text{ if } k \in Z_{m_n+2}^{\infty}.$$

1. J. Diblik and H. Halfarová, *General explicit solution of planar weakly delayed linear discrete systems and pasting its solutions,* Abstr. Appl. Anal. 2014, doi:10.1155/2014/627295, 1-37.

2. J. Diblik and H. Halfarová, *Explicit general solution of planar linear discrete systems with constant coefficient and weak delays,* Adv. Difference Equ., 2013, Art. number: 50, doi:10.1186/1687-1847-2013-50, 1-29.

3. Diblik and D. Ya. Khusainov, *Representation of solutions of discrete delayed system* $x(k+1) = Ax(k) + Bx(k-m) + f(k)$ *with commutative matrices,* J. Math. Anal. Appl. 318 (2006), no. 1, 63-76.

4. Diblik, D. Khusainov and Z. Šmarda, *Construction of the general solution of planar linear discrete systems with constant coefficients and weak delay,* Adv. Difference Equ., 2009, Art. ID 784935, 18 pages, doi:10.1155/2009/784935.

Dmitrieva Irina Yuriyevna, Dr. Sci. (Phys.–Math.), Assoc. Prof.,
Odessa National Academy of Telecommunications (ONAT), Odessa, Ukraine,
e-mail: irina.dm@mail.ru

ANALYTICAL STUDY OF THE DIFFERENTIAL MAXWELL SYSTEM AS ELECTRODYNAMIC MATHEMATICAL MODELING

Dmitrieva I.Yu.

Suggested article concerns explicit solution of various types of the differential Maxwell system. The latter represents corresponding basic mathematical model of electromagnetic wave propagation in the different guided systems, and in the slow-wave structures [1], in particular. In spite of those rather distant achievements of [1], their virtues were not essentially improved even till now.

Though a lot of papers declare their own results as exact analytical investigation in the classical electromagnetic field theory, in reality, the majority of them propose those methods that are pure approximate. At any rate, when some article deals with precise analysis of the specific differential Maxwell system, inevitably, it is based on the Bromvich mode [2]. Especially, this approach is used for curvilinear coordinates that mostly answer industrial requirements of technical electrodynamics. However, even in this case, few additional, rather tight restrictions are usuallyaccepted contracting the original physical and engineering problem statement.

Taking into account the aforesaid information, the present paper deals with the general operator diagonalization method for arbitrary finite-dimensional system of PDEs (partial differential equations) with piece-wise constant coefficients [3]. Such systems are reduced to the equivalent totality of scalar equations where each of them depends on the only one component of the original vector field function. In terms of classical Maxwell theory, it means obtaining of the general wave PDE with respect to all electromagnetic vector or scalar intensities. The given procedure is independent as of the type of the spatial coordinates, as of the initial and boundary conditions, which can be formed only for the final scalar problems instead of the original matrix version. It is obvious that the latter is incomparably more complicated than the scalar one.

Actually, the given results suggest an effective diagonalization procedure for the differential Maxwell system in the Cartesian and cylindrical coordinates without any extra physical or industrial restrictions. Both cases are very important in the microwave theory and its current applications to the slow-wave structures.

1. Силин Р.А. Замедляющие системы / Р.А. Силин, В.П. Сазонов. – Москва: Советскоерадио, 1966. – 632 с.

2. Анго А. Математика для электро- и радиоинженеров: [изд. 2-е, стереотипное; пер. с франц. К.С. Шифрина] / А. Анго. – Москва: Наука, 1967. – 780 с.

3. Dmitrieva I.Yu. Diagonalization of the differential operator matrix in the case of the multidimensional circuits / I.Yu. Dmitrieva, A.M. Ivanitckiy // Наукові праці ОНАЗ ім. О.С. Попова. – 2009. – № 1. – С. 36 – 51.

Gaiko Valery Alexandrovich, Ph. D. (Phys. Math.), Assoc. Prof., Leading Researcher,
National Academy of Sciences of Belarus, United Institute of Informatics Problems, Minsk, Belarus,
e-mail: valery.gaiko@gmail.com

BIFURCATIONS OF LIMIT CYCLES IN LOW-DIMENSIONAL POLYNOMIAL DYNAMICAL SYSTEMS

Gaiko V.A.

We carry out the global qualitative analysis of low-dimensional polynomial dynamical systems. To control all of their limit cycle bifurcations, especially, bifurcations of multiple limit cycles, it is necessary to know the properties and combine the effects of all of their rotation parameters. It can be done by means of the development of new bifurcational and topological methods based on the well-known Weierstrass preparation theorem and the Perko planar termination principle stating that the maximal one-parameter family of multiple limit cycles terminates either at a singular point which is typically of the same multiplicity (cyclicity) or on a separatrix cycle which is also typically of the same multiplicity (cyclicity) [1]. This principle is a consequence of the principle of natural termination which was stated for higher-dimensional dynamical systems by A. Wintner who studied one-parameter families of periodic orbits of the restricted three-body problem and used Puiseux series to show that in the analytic case any one-parameter family of periodic orbits can be uniquely continued through any bifurcation except a period-doubling bifurcation. Such a bifurcation can happen, e. g., in a three-dimensional Lorenz system. This cannot happen for planar systems. That is why the Wintner-Perko termination principle is applied for studying multiple limit cycle bifurcations of planar polynomial dynamical systems [1].

If we do not know the cyclicity of the termination points, then, applying canonical systems with field rotation parameters, we use geometric properties of the spirals filling the interior and exterior domains of limit cycles. Using this method, we have solved, e. g., Smale's Thirteenth Problem proving that the Liénard system with a polynomial of degree $2k+1$ can have at most k limit cycles [2]. Generalizing the obtained results, we have also solved the problem of the maximum number of limit cycles surrounding a singular point for an arbitrary polynomial system and Hilbert's Sixteenth Problem for a general Liénard polynomial system with an arbitrary (but finite) number of singular points [3]. Applying a similar approach, we complete the strange attractor bifurcation scenario which connects globally the homoclinic, period-doubling, Andronov-Shilnikov, and period-halving bifurcations in the classical Lorenz system [4]. We discuss also how to apply this approach for studying global limit cycle bifurcations of discrete polynomial (and rational) dynamical systems which model the population dynamics in biomedical and ecological systems.

This work was partially supported by the Simons Foundation of the International Mathematical Union and the Department of Mathematics and Statistics of the Missouri University of Science and Technology.

1. *Gaiko V. A.* Global Bifurcation Theory and Hilbert's Sixteenth Problem. - Kluwer Academic Publishers, Boston, 2003.

2. *Gaiko V. A.* On limit cycles surrounding a singular point // Differ. Equ. Dyn. Syst. - 2012. -20. - P. 329-337.

3. *Gaiko V. A.* The applied geometry of a general Liénard polynomial system // Appl. Math. Letters. - 2012. -25. - P. 2327-2331.

4. *Gaiko V. A.* Global bifurcation analysis of the Lorenz system // J. Nonlinear Sci. Appl. - 2014. -7. - P. 429-434.

Hentosh Oksana Yevgenivna, Candidate (Phys.-Math.), Senior Sci. Reseacher,
Pidstryhach Inst. for Applied Problems of Mech. and Math., NAS of Ukraine, Lviv, Ukraine,
e-mail: ohen@ua.fm

THE LIE-ALGEBRAIC STRUCTURE OF BI-HAMILTONIAN TWO-DIMENSIONAL DIFFERENTIAL-DIFFERENCE SYSTEMS

Hentosh O.Ye.

By means of the general approach [1] to the construction of the operator Lie algebra with a nondegenerated invariant scalar product from an associative algebra one can obtain the Lie algebra $\mathcal{G}$ of shift operators in the forms $\mathcal{A} = \sum_{j\in\mathbb{Z}}^{j\ll\infty} A_j T^j, \quad A_j \in C^\infty(\mathbb{Z};\mathrm{g}),$

where g is the Lie algebra of shift operators, T and $\mathcal{E}$ are usual shift operators, acting by the rules: $T^j a(n,m) = a(n+j,m)T^j, \quad \mathcal{E}^i a(n,m) = a(n,m+i)\mathcal{E}^i, \quad a \in C^\infty(\mathbb{Z}^2;\mathbb{R}),$

and $A_j := \sum_{i\in\mathbb{Z}}^{i\ll\infty} a_{j,i}\mathcal{E}^i$, with the standard commutator [1]

$$[\mathcal{A},\mathcal{B}] = \mathcal{A}\mathcal{B} - \mathcal{B}\mathcal{A}, \quad \mathcal{A},\mathcal{B} \in \mathcal{G},$$

and the scalar product $(\mathcal{A},\mathcal{B}) = Tr(\mathcal{A}\mathcal{B}), \quad Tr\,\mathcal{A} := \sum_{n\in\mathbb{Z}} \tau(A_0) := \sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{m\in\mathbb{Z}} a_{0,0}.$

On the dual space $\mathcal{G}^*$ to the Lie algebra $\mathcal{G}$ the Lie-Poisson bracket (1) the $\mathcal{R}$-deformed commutator $[\mathcal{A},\mathcal{B}]_{\mathcal{R}} = [\mathcal{R}\mathcal{A},\mathcal{B}] + [\mathcal{A},\mathcal{R}\mathcal{B}], \quad \mathcal{R} := \frac{1}{2}(P_+ - P_-),$

where $\mathcal{G} := \mathcal{G}_+ \oplus \mathcal{G}_-$, the Lie subalgebra $\mathcal{G}_+ \subset \mathcal{G}$ consists of the elements $\sum_{s\in\mathbb{Z}_+}^{s\ll\infty} A_s T^s \in \mathcal{G}$, $P_\pm\mathcal{G} = \mathcal{G}_\pm$, $P_\pm\mathcal{G}_\mp = 0$, generates the Lie-Poisson bracket

$$\{\gamma,\mu\}_{\mathcal{R}}(\ell) = (\ell,[\nabla\gamma(\ell),\nabla\mu(\ell)]_{\mathcal{R}}), \quad \ell \in \mathcal{G}^*, \tag{1}$$

where $\gamma,\mu \in \mathcal{D}(\mathcal{G}^*)$ are smooth by Frechet functionals on $\mathcal{G}^*$, ∇ is a gradient symbol.

The Lie-Poisson bracket (1) and the Casimir functionals $\gamma_k := \frac{p}{k+p} Tr\,\ell^{\frac{k+p}{p}}$, $k \in \mathbb{Z}_+$, determines the hierarchy of commuting one with each other Lax type flows

$$\frac{d}{dt_k}\ell = [(\ell^{\frac{k}{p}})_+, \ell], \quad k \in \mathbb{Z}_+, \tag{2}$$

where $\ell := T^p + \sum_{j\in\mathbb{Z}}^{j<p} \hat{u}_j T^j \in \mathcal{G}^*$, $\hat{u}_j \in C^\infty(\mathbb{Z};\mathrm{g})$, the index "+" designates a projection of the corresponding operator on the Lie subalgebra $\mathcal{G}_+$.

The second Hamiltonian structure for the hierarchy (1), is given by the Lie-Poisson bracket

$$\{\gamma,\mu\}_{\mathcal{R}_\ell}(\ell) = (\ell,[\nabla\gamma(\ell),\nabla\mu(\ell)]_{\mathcal{R}_\ell}), \quad \ell \in \mathcal{G}^*,$$

where $\mathcal{R}_\ell(\mathcal{A}) = (\ell\mathcal{A})_+ - (\mathcal{A}\ell)_-$ and $[\mathcal{A},\mathcal{B}]_{\mathcal{R}_\ell} = [\mathcal{R}_\ell\mathcal{A},\mathcal{B}] + [\mathcal{A},\mathcal{R}_\ell\mathcal{B}]$ for any $\mathcal{A},\mathcal{B} \in \mathcal{G}$.

It is shown that the reduced on the orbits of the Lie algebra coadjoint action evolution equations (2) can be considered as Lax representations for some bi-Hamiltonian $(2+1)$-dimensional nonlinear differential-difference systems.

1. Hentosh O., Prytula M., Prykarpatsky A. Differential-geometric and Lie-algebraic foundations of studying integrable nonlinear dynamical systems on functional manifolds. - Lviv: Publishing Center of Ivan Franko Lviv National University, 2006. - 403 p. (in Ukrainian)

Ivanov Anatoli F. , Ph. D., Prof.
Pennsylvania State University, USA
e-mail: aivanov@psu.edu

PERIODIC SOLUTIONS OF A CLASS OF DIFFERENTIAL DELAY EQUATIONS

Ivanov A.F.

A scalar differential delay equation of the form

$$\varepsilon x'(t) + x(t) = f(x(t-1))$$

is considered where function f is a Farey-type nonlinearity defined by

$$f(x) = \begin{cases} mx + A & if \quad x \le 0 \\ mx + B & if \quad x > 0 \end{cases}$$

for some $0 < m < 1$ and $A > 0 > B$. The map f as a dynamical system always has a unique globally attracting cycle. The problem of existence of periodic solutions of the differential delay equation and their properties in relation to the one-dimensional map f are studied for small $\varepsilon > 0$. Theoretical results are demonstrated and supported by numerical calculations.

1. A.F.Ivanov and A.N.Sharkovsky, Oscillations in singularly perturbed delay equations. *Dynamics Reported (New Series), Springer Verlag* 1 (1991), 165-224.

2. A.N.Sharkovsy, Yu.L.Maistrenko and E.Yu.Romanenko, Difference Equations and Their Perturbations. *Kluwer Academic Publishers*, 1993, vol. 250, 358 pp.

Denys Ya. Khusainov
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine
e-mail: d.y.khusainov@gmail.com
Michael Pokojovy
University of Konstanz, Konstanz, Germany
e-mail: michael.pokojovy@uni-konstanz.de
Reinhard Racke
University of Konstanz, Konstanz, Germany
e-mail: reinhard.racke@uni-konstanz.de

LINEAR HEAT EQUATION WITH DELAY: ILL-POSEDNESS VS. WELL-POSEDNESS AND LONG-TIME BEHAVIOR

Denys Ya. Khusainov, M. Pokojovy, R. Racke

We propose a Hilbert space solution theory for a nonhomogeneous heat equation with delay in the highest order derivatives with nonhomogeneous Dirichlet boundary conditions in a bounded domain. Under rather weak regularity assumptions on the data, we prove a well-posedness result and give an explicit representation of solutions. Further, we prove an exponential decay rate for the energy in the dissipative case. We also show that lower order regularizations lead to ill-posedness, also for higher-order equations. Finally, an application with physically relevant constants is given.

1. M. Dreher, R. Quintanilla, R. Racke, *Ill-posed problems in thermomechanics, Applied Mathematics Letters, 22(9), pp. 1374-1379 (2009)*

2. D. Ya. Khusainov, M. Pokojovy, R. Racke, Strong and Mild Extrapolated L^2 -Solutions to the Heat Equation with Constant Delay, SIAM Journal on Mathematical Analysis, 47(1), pp. 427-454 (2014)

ShvetsAleksandrYurievich, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Department of Mathematical Physics,
National Technical University of Ukraine"Kyiv Polytechnic Institute", Kyiv, Ukraine
e-mail: alex.shvets@bigmir.net
Makaseyev Alexander Mikhailovich, Assistant Lecturer, Department of Mathematical Physics,
National Technical University of Ukraine"Kyiv Polytechnic Institute", Kyiv, Ukraine
e-mail: makaseyev@ukr.net

THE INFLUENCE OF DELAY FACTORS IN PENDULUM SYSTEMS WITH LIMITED EXCITATION

ShvetsA.Yu., MakaseyevA.M.

The dynamics of non-ideal dynamical system "pendulum – electric motor" with taking into account various factors of delay is considered. Mathematical model of the system is a system of ordinary differential equations with delay. The approaches that reduce the mathematical model of the system to a system of three, nine or fifteen differential equations without delay are suggested. The influence of delay on steady-state regimes of the "pendulum – electric motor" system is studied. Maps of dynamical regimes, the dependencies of maximal non-zero Lyapunov's characteristic exponent from the delay, phase-parametric characteristics, Poincare sections and maps are constructed and analyzed. The methodology of such studies is described in detail in [1]. The scenarios of transition from steady-state regular regimes to chaotic ones are identified.

It is shown that neglecting the presence of delay in such systems may affect the qualitative change in the dynamics. In some cases the delay is the main reason of origination as well as vanishing of chaotic attractors [2].

The use of three-dimensional mathematical model to study the dynamics of "pendulum – electric motor" systems is sufficient only at small values of the delay. For relatively high values of the delay multi-dimensional system of nine or fifteen equations should be used.

1. Krasnopolskaya T.S.Regular and chaotic dynamics of systems with limited excitation / T.S. Krasnopolskaya, A.Yu. Shvets.– R&C Dynamics, Moscow-Izhevsk, 2008.– 280 p.

2. Shvets A.Yu. Chaos in Pendulum Systems with Limited Excitation in the Presence of Delay / A.Yu. Shvets, O.M. Makasyeyev // Chaotic Modeling and Simulation (CMSIM) Journal. – 2014. – №3. – P. 233–241.

Авдеева Татьяна Васильевна, старший преподаватель,
Национальный технический университет Украины «КПИ», Киев, Украина
e-mail: avdeeva_t1@rambler.ru
Ильичева Людмила Максимовна, кандидат физико-математических наук, старший преподаватель
Киевская государственная академия водного транспорта им. гетмана Петра Конашевича-Сагайдачного, Киев, Украина
e-mail: m_ilicheva@ukr.net

ОБОБЩЕННАЯ МОДЕЛЬ СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ ПРИ ОГРАНИЧЕНИЯХ НА ЗНАЧЕНИЯ ИНТЕНСИВНОСТЕЙ

Авдеева Т.В., Ильичева Л.М.

В книгах [1,2] рассматривается случай стационарного функционирования некоторой системы массового обслуживания (СМО). Имеется входной поток клиентов и выходной поток обслуженных клиентов, причем заданы следующие величины: n – число клиентов в СМО (в очереди на обслуживание); p_n – вероятность этого события; λ_n, μ_n – интенсивности входного и выходного потоков, соответственно (при наличии в системе n клиентов). Речь идет об обобщении пуассоновского стационарного потока событий следующим образом: для довольно малого промежутка времени равны ожидаемые интенсивности входного и выходного потоков при наличии в системе n >0 клиентов (клиент либо выбывает из системы, либо поступает в систему). Составим уравнение баланса для ожидаемых интенсивностей в состоянии n:

$$\lambda_{n-1} p_{n-1} + \mu_{n+1} p_{n+1} = (\lambda_n + \mu_n) p_n$$

Тогда получим следующие соотношения: $p_1 = (\lambda_0 / \mu_1) p_0, p_2 = (\lambda_1 \lambda_0 / \mu_2 \mu_1) p_0$ и в общем случае:

$$p_n = (\lambda_{n-1} \lambda_{n-2} \cdots \lambda_0 / \mu_n \mu_{n-1} \cdots \mu_1) p_0, n = 1,2,\ldots$$

Поскольку справедливо соотношение: $\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$, можно получать выражение для p_0.

Представляет интерес случай, когда $\lambda_0 / \mu_n \approx const, \lambda_n / \mu_n \approx 1/q^n, q \succ 1, n = 1,2\ldots$

Тогда для вероятностей получим: $p_1 \approx c\, p_0, p_2 \approx c/q, p_k \approx c/q^{k-1}$. Для p_0 выражение имеет вид: $p_0 \approx (q-1)/cq$.

Такой случай имеет место, если начальное значение интенсивности поступления клиентов в систему относительно высоко, а отношения интенсивностей входов/выходов клиентов из системы связаны как общий член геометрической прогрессии.

1. Третьяк О.І., Усов А.В., Коновалов А.П., Дубров К.О. Імовірнісно-статистичне моделювання техніко-економічних систем. Монографія. – Одеса: Астропринт, 2003. – 224с., ч.1, ч.2 – 440с.

2. Лабскер Л.Г. Вероятностное моделирование в финансово-экономической области. М.: Альпина Паблишер, 2002. – 224с.

Азизбеков Эльвин Ибрагим, кандидат физико-математических наук
Бакинский Государственный Университет, Баку, Азербайджан,
e-mail: eazizbayov@bsu.az

ОБ ОДНОМ ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСОМ МЕТОДЕ НАХОЖДЕНИЯ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Азизбеков Э.И.

В докладе рассматривается линейное неоднородное уравнение с одним постоянным запаздыванием

$$x''(t)+a_1x'(t)+a_2x'(t-\tau)+b_1x(t)+b_2x(t-\tau)=f(t),\ t\ge 0,\ \tau>0, \tag{1}$$

с начальным условием

$$x(t)\equiv\varphi(t),\ x'(t)=\varphi'(t),\ -\tau\le t\le 0. \tag{2}$$

Здесь a_1,a_2,b_1,b_2 постоянные, $f(t)$ - непрерывная функция, $\varphi(t)$ - произвольная, дважды непрерывно дифференцируемая на начальном промежутке $-\tau\le t\le 0$ функция, определяющая начальные условия.

Обозначим $x_1(t)$ - решение однородного дифференциального уравнения с начальными условиями $x_1(t)\equiv 1,\ x_1'(t)\equiv 0,\ -\tau\le t\le 0,\ x_2(t)$ - решение однородного дифференциального уравнения с начальными условиями $x_2(t)\equiv t+\tau,\ x_2'(t)\equiv 1.$

Теорема 1. Решение задачи Коши для однородного уравнения с начальными условиями (2) может быть записано в виде

$$x(t)=\varphi(-\tau)x_1(t)+\varphi'(-\tau)x_2(t)+\int_{-\tau}^{0}x_2(t-\tau-s)\varphi''(s)ds. \tag{3}$$

Таким образом, для получения решения задачи Коши необходимо иметь две функции $x_1(t),\ x_2(t)$, являющиеся решениями однородного уравнения со специальными (единичными) начальными условиями.

Теорема 2. Решения $x_1(t),\ x_2(t)$ однородного уравнения с запаздыванием (3) могут быть записаны в виде

$$x_1(t)=\begin{cases} x_{1,0}(t), -\tau\le t<0,\\ x_{1,1}(t), 0\le t<\tau,\\ \cdots\\ x_{1,n}(t)\ \ (n-1)\tau\le t<n\tau\end{cases},\ x_2(t)=\begin{cases} x_{2,0}(t), -\tau\le t<0,\\ x_{2,1}(t), 0\le t<\tau,\\ \cdots\\ x_{2,n}(t)\ \ (n-1)\tau\le t<n\tau\end{cases}. \tag{4}$$

$$x_{1,0}(t)\equiv 1,\ x_{1,0}'(t)\equiv 0,\ x_{2,0}(t)\equiv t+\tau,\ x_{2,0}'(t)\equiv 1,\ -\tau\le t\le 1;$$

$$x_{i,n}(t)=x_{i,n-1}((n-1)\tau)x_1^0(t)+\frac{d}{dt}x_{i,n-1}(t)\Big|_{t=(n-1)\tau}x_2^0(t)+\int_0^t K(t,s)F_{i,n}(s)ds,$$

$$F_{i,n}(t)=-a_2\frac{d}{dt}x_{i,n-1}(t-\tau)-b_2x_{i,n-1}(t-\tau),\ i=\overline{1,2},\ n=1,2,3,...,$$

$$K(t,s)=\frac{x_1^0(s)x_2^0(t)-x_1^0(t)x_2^0(s)}{W[x_1^0(s),x_2^0(s)]},\ W[x_1^0(s),x_2^0(s)]=\begin{vmatrix} x_1^0(s) & x_2^0(s)\\ \dfrac{d}{ds}x_1^0(s) & \dfrac{d}{ds}x_2^0(s)\end{vmatrix}.$$

$x_1^0(t),\ x_2^0(t)$ -решения однородного уравнения без запаздывания $x''(t)+a_1x'(t)+b_1x(t)=0,$ удовлетворяющие условиям $x_1^0(0)=1,\ \dfrac{d}{dt}x_1^0(0)=0,\ x_2(0)=0,\ \dfrac{d}{dt}x_2(0)=1.$

Айсагалиев Серикбай Абдигалиевич, доктор технических наук, профессор,
Казахский национальный университет имени аль-Фараби, Алматы, Казахстан,
e-mail: serikbai.aisagaliev@kaznu.kz;
Абенов Болат Кусаинович, старший преподаватель,
Казахский национальный университет имени аль-Фараби, Алматы, Казахстан,
e-mail: babenov@mail.ru
Аязбаева Асем М., младший научный сотрудник,
Казахский национальный университет имени аль-Фараби, Алматы, Казахстан,
e-mail: a_ayazbaeva@mail.ru

К АБСОЛЮТНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ РЕГУЛИРУЕМЫХ СИСТЕМ В КРИТИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ

Рассматривается уравнение движения нелинейных систем автоматического управления в критическом случае

$$\dot{x} = Ax + B\varphi(\sigma),\ \frac{d\xi}{dt} = \eta,\ \frac{d\eta}{dt} = \varphi(\sigma),\ \sigma = Dx + E\eta + F\xi,$$
$$x(0) = x_0,\ \xi(0) = \xi_0,\ \eta(0) = \eta_0, t \in I = [0,\infty), \tag{1}$$

где A, B, D, E, F – постоянные матрицы порядков $n \times n,\ n \times 1,\ 1 \times n,\ 1 \times 1,\ 1 \times 1,$ соответственно, матрица A – гурвицева, т.е. $Re\lambda_j(A) < 0,\ j = \overline{1,n},\ \lambda_j(A)$ – собственные значения матрицы A.Функция

$$\varphi(\sigma) \in \Phi_0 = \{\varphi(\sigma) \in C(R^1, R^1) / \varphi(\sigma) = \varepsilon\sigma + \overline{\varphi}(\sigma),\ 0 \le \overline{\varphi}(\sigma)\sigma \le \mu_0\sigma^2,$$
$$\overline{\varphi}(0) = 0, |\overline{\varphi}(\sigma)| \le \overline{\varphi}_*,\ 0 < \overline{\varphi}_* < \infty, \forall\sigma, \sigma \in R^1\}. \tag{2}$$

где $\varepsilon > 0$ – сколь угодно малое число.

$$\overline{\varphi}(\sigma) \in \Phi_1 = \{\overline{\varphi}(\sigma) \in C(R^1, R^1) \mid 0 \le \overline{\varphi}(\sigma)\sigma < \mu_0\sigma^2,\ \overline{\varphi}(0) = 0,$$
$$|\overline{\varphi}(\sigma)| \le \overline{\varphi}_*,\ 0 < \overline{\varphi}_* < \infty, \forall\sigma,\ \sigma \in R^1\} \tag{3}$$

Поскольку величина $\varphi_*,\ 0 < \overline{\varphi}_* < \infty,\ \varepsilon > 0$ – сколь угодно малое число, то включения (2), (3) содержат все нелинейности из сектора $[0, \mu_0]$. Встречающиеся на практике системы автоматического управления относятся к системам с ограниченными ресурсами, для таких систем функция $\varphi(\sigma)$ удовлетворяет условиям (2), (3).

Исследуются абсолютная устойчивость положения равновесия системы (1) – (3).

Предлагается новый метод исследования абсолютной устойчивости положения равновесия нелинейных регулируемых систем в критическом случае, путем оценки несобственных интегралов вдоль решения системы. Найдены секторы, где положение равновесия системы абсолютно устойчиво и проблема Айзермана имеет положительное решение. Эффективность метода показана на примере.Отличительной особенностью подхода является получение тождеств вдоль решения системы относительно входной и выходной переменных нелинейного элемента,которые позволяют использовать сведения о свойствах нелинейной части системы для оценки несобственных интегралов. Такой подход к исследованию абсолютной устойчивости регулируемых систем позволил получить дополнительные соотношения, связывающие фазовые переменные, получить более эффективные условия абсолютной устойчивости.

Бащенко Оксана Сергіївна, студентка другого року магістратури, механіко-математичний факультет,*Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,*
e-mail: oksana.bashhenko@gmail.com

КВАДРАТИЧНІ ФІЛЬТРИ ДЛЯ СТОХАСТИЧНИХ ПРОЦЕСІВ

Бащенко О.С.

В даній роботі розглянуто задачу оптимальної оцінки процесу під впливом випадкових збурень та стохастичних похибок вимірювання, яка полягає в апроксимації поведінки процесу по данним зашумлених вимірів. Дискретна модель процесу, який досліджується, згідно з [1], описується рівняннями

$$x(k+1) = \Phi(k+1,k)x(k) + \Gamma(k+1,k)w(k)$$
$$z(k+1) = H(k+1)x(k+1) + v(k+1)$$

де *x(k)* —оцінюваний вектор стану системи, *z(k)*—відомий вектор вимірювань системи, *v(k)* та *w(k)*—випадкова похибка при вимірюванні та випадкове збурення відповідно. Мета полягає в знаходженні оптимальної оцінки для вектору стану на основі наявних спостережень вектору вимірів. В [1] показано, що така оцінка являє собою математичне сподівання за умови наявних спостережень: $\hat{x}(k|j) = E[x(k)|z*(j)]$, де *k* являє собою поточний момент, а *z*(j)*— сукупність спостережень *z(1),...,z(j).*

У випадку гаусовості та незалежності випадкових чинників обчислення цього математичного сподівання не викликає труднощів і зводиться до використання фільтрів Калмана. Згідно з [2] та [3] у випадку негаусової моделі у зв'язку зі складністю прямого обчислення умовного математичного сподівання використовуються наближення, зокрема поліноміальні фільтри. В даній роботі виведено та досліджено квадратичний фільтр та розроблено алгоритм на мові програмування R для виконання необхідних обчислень.

1. Медич Дж. Статистически оптимальныелинейные оценки и управление: [Пер. с англ. под редакцией А.С. Шаталова.]– Москва: Энергия, 1973. – 440 с.
2. Carravetta F. Polynomial filteringfor linear discrete time non-gaussian systems/ F. Carravetta, A. Germani, M. Raimondi// SIAM Journal of Applied Mathematics: Control and Optimization, Vol. 34, No. 5, September 1996—p.1666-1690.
3. Nakamori S. Least-squares νth-order polynomial estimation of signals from observations affected by non-independent uncertainty/ S. Nakamori, R. Caballero-Aguila, A. Hermoso-Carazo, J. Jimenez-Lopez, J. Linarez-Perez// Applied Mathematics and Computation 176 (2006) - p.642-653

Буряк Дмитрий Владимирович, кандидат физ.-мат. наук, доцент,
Одесский национальный политехнический университет, Одесса, Украина,
e-mail: dvburyak2008@rambler.ru
Крапива Наталия Владимировна, кандидат физ.-мат. наук, доцент,
Одесский национальный политехнический университет, Одесса, Украина,
e-mail: scherbinskaya@gmail.com

СУЩЕСТВОВАНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ ОДНОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С ФУНКЦИЯМИ ЛЯПУНОВА

Буряк Д.В., Крапива Н.В.

Рассматривается система дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{cases} y_k' = \sum_{j=1}^{n} a_{kj}(x,y_1,...,y_n,V)y_j + f_k(x,y_1,...,y_n,V), \\ k=\overline{1,n} \end{cases} \quad (1)$$

где

функции $a_{kj}(x,y_1,...,y_n,V)$ и $f_k(x,y_1,...,y_n,V)$ для $\forall\, k,j=\overline{1,n}$ удовлетворяют условиям:

$a_{kj}, f_k \in C^{0,1,...,1,1}_{x,y_1,...,y_n,V}\left(R^{n+2}\right)$, $\sum_{k=1}^{n} f_k^2(x,0,...,0,0) > 0$;

являются T-периодическими по $x: \exists\, 0 < T = const$, $a_{kj}(x+T,y_1,...,y_n,V) = a_{kj}(x,y_1,...,y_n,V)$ и $f_k(x+T,y_1,...,y_n,V) = f_k(x,y_1,...,y_n,V)$;

$\exists\, 0 < \alpha_k, M_k = const: |a_{kk}(x,y_1,...,y_n,V)| \ge \alpha_k$, $|f_k(x,y_1,...,y_n,V)| \le M_k$, $\forall (x,y_1,...,y_n,V) \in R^{n+2}$;

$a_{kj}(x,y_1,...,y_n,V) = -a_{jk}(x,y_1,...,y_n,V), k \ne j$, $\forall (x,y_1,...,y_n,V) \in R^{n+2}$;

$V \equiv V(y_1,...,y_n) = \sum_{k=1}^{n} y_k^2$ – функция Ляпунова такая, что её производная в силу системы (1) при достаточно большом $0 < r = const$ сохраняет свой знак на поверхности $\partial\Omega \equiv \sum_{k=1}^{n} y_k^2 = r^2$, т. е: $sgnW \equiv sgn\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial y_k}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{kj}(x,y_1,...,y_n,V)y_j + f_k(x,y_1,...,y_n,V)\right)\right) = \pm 1$.

Доказано, что при сделанных предположениях поверхность $\partial\Omega$, ограничивающая соответствующую область Ω, будет поверхностью без контакта. Поэтому области пересечения её сплоскостями $x = x_0 + (m-1)T$, $x = x_0 + mT$, $(\forall x_0 \in R, m \in Z)$ вдоль соответствующих интегральных кривых как при возрастании, так и при убывании x ,отображаются в себя. В силу непрерывной зависимости решений от начальных условий такое отображение также будет непрерывным и, таким образом, можно применить теорему Боля-Брауэра. Следовательно, существует хотя бы одна недвижимая точка этого отображения, которой будет отвечать T-периодическое решение системы (1). Другими словами, система (1) имеет хотя бы одно T-периодическое решение.

Бычков Алексей Сергеевич, кандидат физ.-мат. наук, доцент
Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, Киев, Украина,
e-mail: bos.knu@gmail.com

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ПО ЧАСТИ ПЕРЕМЕННЫХ ГАБРИДНЫХ АВТОМАТОВ

Бычков А.С..

Рассмотрим гибридную систему

$$\dot{y} = f_q(y),\ y \in Inv_q,\ y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

где переключение между состояниями $q \in Q$ непрерывное и может происходить как по вектору наблюдаемых координат y_1, так и за скрытым вектором координат y_2. Ставится задача исследовать устойчивость ТФО по вектору наблюдаемых координат y_1. Считаем, что $y_1 = 0$ — стационарная точка системы для всех значений скрытого вектора y_2.

Определение 1. Функция $V(y): B_r(0_1) \times R^{n_2} \to R$ называется y_1-положительно определенной, если существует положительно определенная функция $W(y_1): B_r(0_1) \to R$ такая, что для произвольного $y = (y_1, y_2) \in B_r(0_1) \times R^{n_2}$ выполняется неравенство $V(y_1, y_2) \geq W(y_1)$.

Определение 2. Функция $V(y): B_r(0_1) \times R^{n_2} \to R$ называется y_1-равномерно-положительно определенной, если существуют две положительно определенные функции $W(y_1), U(y_1): B_r(0_1) \to R$ такие, что для произвольного $y = (y_1, y_2) \in B_r(0_1) \times R^{n_2}$ выполняется неравенство $W(y_1) \leq V(y_1, y_2) \leq U(y_1)$.

Мы будем рассматривать системы, в которых переключения неперервные и циклические Заметим, что это допущение не умаляет общности.

Возьмем произвольное число $c^0 \in (0, C)$ и построим такую последовательность чисел:

$$c^1 = \sup_{\substack{x^1\big|_{1\to 2} \\ V^1(x^1)=c^0}} V^2(x^1),\ c^2 = \sup_{\substack{x^2\big|_{2\to 3} \\ V^2(x^2)=c^1}} V^3(x^2), \ldots, c^N = \sup_{\substack{x^N\big|_{N\to 1} \\ V^N(x^N)=c^{N-1}}} V^1(x^N)$$

Обозначим шар в пространстве R^{n_1} радиуса r через $B_r^1(y_1)$.

Теорема. Пусть гибридный автомат имеет циклические непрерывные переключения. Если в цилиндре $D \times R^{n_2}$, где $D \subseteq R^{n_1}$, существует такой набор y_1-равномерно-положительно определенных функций Ляпунова $\dot{V}^q: D \times R^{n_2} \to R$, что $\dot{V}^q|_{f_q} \leq 0$ для $y \in D \times Inv_q$ и $c^N \leq c^0$, то $x = 0$ — устойчивая тривиальная фазовая орбита гибридного автомата.

Условие равномерности достаточно сильно ограничение, причем для систем без переключений оно не нужно. Для систем без переключений достаточно иметь y_1-положительно определенную функцию Ляпунова. Можно показать, что даже одного переключения достаточно, чтоб из двух устойчивых систем получить неустойчивый гибридный автомат по части переменных.

Венгерський Петро Сергійович, кандидат фіз.-мат. наук, доцент кафедри інформаційних систем,*Львівський національний університет ім. І. Франка,Львів, Україна,*
e-mail: p_vengersky@franko.lviv.ua
Коковська Ярина Володимирівна, асистент кафедри дискретного аналізу та інтелектуальних систем, *Львівський національний університет ім. І. Франка, Львів, Україна,*
e-mail: yaryna.kokovska@gmail.com

ПРО МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ СТОКУ МІЛКОЇ ВОДИВ НАБЛИЖЕННІ КІНЕМАТИЧНОЇ ХВИЛІ

П.Венгерський, Я.Коковська

Важливе значення серед гідрологічних моделей відіграють моделі схилового стоку в кінематичному наближенні (дощовий стік, русловий стік) [1]. Основна властивість цих моделей полягає в тому, що переміщення водних мас відбувається в умовах рівноваги сил опору та сил тяжіння. Рівняння, які описують ці процеси отримуються з загальних рівнянь мілкої води у гідродинамічному наближенні і носять назву кінематичних рівнянь (рівнянь про кінематичні хвилі).

На відміну від динамічних хвиль, які можуть поширюватися як вниз, так і вверх за течією, кінематичні хвилі поширюються тільки вниз за течією. Динамічні хвилі на природніх водозборах та на річних схилах розповсюджуються з набагато більшою швидкістю ніж кінематичні і тому швидко зникають. В результаті чого, більша частина паводкових хвиль рухається зі швидкістю близькою до швидкості кінематичної хвилі.

Спрощенірівняннястокуводиувиглядірівнянькінематичноїхвилізапишемо увигляду:

$$\frac{\partial F}{\partial t}+\frac{3}{2}C\sqrt{iF}\,\frac{\partial F}{\partial x}=Bw,$$

Длярегуляризаціїрозв'язкувпопередньомурівнянніведемододанокздругою похідноюпо площіпоперечногоперерізупотоку,врезультатіотримаємо

$$\frac{\partial F}{\partial t}+\frac{3}{2}C\sqrt{iF}\,\frac{\partial F}{\partial x}-\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=Bw,$$

де $F=F(x,t)$ - площа поперечного перерізу; $B=b(x,y)-a(x,y)=const$ – ширина русла;w – бічний притік; Re - число Рейнольдса; i – нахил лінії дна.

Доповнимо це рівняння початковими та крайовими умовами:

$$F_{t=0}=F_0,$$

$$\left(-\beta\frac{\partial F}{\partial x}+(1-\beta)F\right)\Big|_{x=0}=0,$$

$$\left(\gamma\frac{\partial F}{\partial x}+(1-\gamma)F\right)\Big|_{x=L}=0,\quad \gamma,\beta>0.$$

Аналізрезультатівобчисленьтестовихприкладів,порядкизбіжностітастійкість розв'язківзадачнаведенів[2].

1. Уизем Дж Линейные и нелинейные волны // Мир – 1977. – 622 с.
2. Венгерський П.С., Коковська Я.В. Один з підходів моделювання процесів руслового стоку рідини// Вісник ЛНУ–Вип.15. 2009. – С.178 195.

Гриценко Г. Е., руководитель «Центра космологии» ФСП,
Национальный технический университет Украины «КПИ», Киев, Украина,
e-mail: yaropolkbazhaluk@gmail.com

ПРОБЛЕМА ВСЕМИРНОГО ТЯГОТЕНИЯ И ОТТАЛКИВАНИЯ

Гриценко Г. Е.

При изучении динамической устойчивости Солнечной системы невыясненными остаются кардинальные причины ее существования:

Физическая причина движения тел Солнечной системы по инерции.

Физическая природа их взаимного притяжения, не решенная ни

И. Ньютоном, ни А. Эйнштейном.

Поскольку планеты не падают на Солнце, а электроны – на ядра атомов, то должно существовать и их взаимное отталкивание, на что неоднократно обращали внимание космологи.

По нашему мнению, перводвигателем тел Солнечной системы является вращающееся силовое электромагнитное поле, генерируемое вращающимся центром Галактики, которое нельзя экспериментально обнаружить, так как мы находимся в его потоке. (Проблема «эфира»). Фиксируется только электромагнитное поле Солнца.

Считаем, что взаимное притяжение и отталкивание планет и Солнца, электрических зарядов, а также электронов и ядер атомов исчерпывающе объясняется «земными» законами Бернулли и Кулона.

Планета движется в направлении собственного вращения Солнца, их скорости складываются, давление пространства между ними падает, планеты и Солнце «подталкиваются» друг к другу внешним большим давлением. Но поскольку собственное вращение планеты совпадает с собственным вращением Солнца, то в «точке касания» их угловые скорости противоположны, давление пространства между телами увеличивается и они «отталкиваются» друг от друга. В результате обеспечивается динамическая стабильность Солнечной системы.

Притяжение и отталкивание электрических зарядов, а также электронов и атомов объясняем направлением их собственного вращения.

Формула Кулона для взаимодействующих электрических зарядов и формула Ньютона для взаимодействующих масс тождественны не только по форме, но и по физической природе, не объясненной их авторами.

В Космосе не существует специфических гравитационных волн, умозрительно предполагаемых Эйнштейном, и они никогда не будут открыты.

На Космос распространяются известные науке земные законы физики.

1. Гриценко Г. Е. Новый подход к проблеме всемирного тяготения // Матеріали VII Наукових читань «Дніпровська орбіта-2012». – Дніпропетровськ, 2012. – С. 172–177.

Жуматов Сайлаубай Сагимбаевич, доктор физ.-мат. наук,
Институт математики и математического моделирования МОН РК, Алматы, Казахстан.
E-mail: sailau.math@mail.ru,

НЕУСТОЙЧИВОСТЬ НЕЛИНЕЙНЫХ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМВ ОКРЕСТНОСТИ ПРОГРАММНОГО МНОГООБРАЗИЯ

Жуматов С.С.

Рассмотрим задачу построения устойчивых систем автоматического управления по заданному программному многообразию $\Omega(t) \equiv \omega(t,x) = 0$ [1, 2]:

$$\dot{x} = f(t,x) - B\xi, \quad \xi = \varphi(\sigma), \quad \sigma = P^T\omega, \; t \in I = [0,\infty), \tag{1}$$

где $x \in R^n$ - вектор состояния объекта, $f \in R^n$ - вектор-функция, удовлетворяющая условиям существования и единственности решения $x = x(t)$, $B \in R^{n\times r}$, $P \in R^{s\times r}$ - постоянные матрицы, $\omega \in R^s$ $(s \le n)$ - вектор, ξ - разрывная скалярная функция управления по отклонению от заданного многообразия, имеющая лишь изолированные точки разрыва, для которых существуют конечные верхний и нижний пределы.

Полагая, что $F = -A\omega$, $A(s\times s)$ - гурвицева матрица, $F(t,\omega,x) \in R^s$ - функция Еругина, то, дифференцируя многообразие $\Omega(t)$ по времени *t* в силу системы (1), получим

$$\dot{\omega} = -A\omega - HB\xi, \; \xi = \varphi(\sigma), \; \sigma = P^T\omega. \tag{2}$$

$$\varphi_-[\sigma(t)] \le \xi(t) \le \varphi_+[\sigma(t)], \; \overline{\lim_{\sigma\to\sigma_0}}\varphi(\sigma) = \varphi_+(\sigma_0), \quad \underline{\lim_{\sigma\to\sigma_0}}\varphi(\sigma) = \varphi_-(\sigma_0) \tag{3}$$

Определение 1.*Дополненным графиком разрывной функции* $\varphi(\sigma)$ *называется замкнутое множество на плоскости* $\{\sigma, \xi\}$*, состоящее из точек* $[\sigma, \varphi(\sigma)]$*, где* σ *- точка непрерывности функции* $\varphi(\sigma)$ *и из всех вертикальных отрезков с концами* $[\sigma_0, \varphi_-(\sigma_0)]$, $[\sigma_0, \varphi_+(\sigma_0)]$*, где* σ_0 *- точки разрыва функции* $\varphi(\sigma)$*. Если программное многообразие является интегральной для системы на* $\lfloor t_1,\ t_2 \rfloor$*, то точка* $[\sigma(t), \xi(t)]$ *при* $t_1 \le t \le t_2$ *принадлежит дополненному графику функции* $\varphi(\sigma)$.

Предположим, что $\mu_1 \le \mu_2, \tau \ge 0, \theta$- некоторые вещественные числа, μ_1 и μ_2 могут принимать значения равные $\pm\infty$. Вводится частотная функция $\pi(\varpi)$:

$$\pi(\varpi) = \tau\,\mathrm{Re}\left\{[1+\mu_1 W(i\varpi)][1+\mu_2 W(i\varpi)]^T\right\} + \theta\,\mathrm{Re}[i\varpi W(i\varpi)] \text{ при } \mu_1 \ne -\infty, \mu_2 \ne +\infty,$$

$$\pi(\varpi) = -\tau\,\mathrm{Re}\left\{W(i\varpi)[1+\mu_2 W(i\varpi)]^T\right\} + \theta\,\mathrm{Re}[i\varpi W(i\varpi)] \text{ при } \mu_1 = -\infty, \mu_2 \ne +\infty,$$

$$\pi(\varpi) = \tau\,\mathrm{Re}\left\{[1+\mu_1 W(i\varpi)][W(i\varpi)]^T\right\} + \theta\,\mathrm{Re}[i\varpi W(i\varpi)] \text{ при } \mu_1 = -\infty, \mu_2 = +\infty$$

Пусть μ - произвольное число. нелинейность $\varphi(\sigma)$ заменим на $\xi = \mu\sigma$.

Теорема. *Пусть матрица* $-A$ *гурвицева, а матрица* $-A - HB\mu P^T$ *имеет* $k \ge 1$ *собственных значений в правой полуплоскости и дополненный график* Φ *функции* $\varphi(\sigma)$ *лежит в секторе* $S[\mu_1, \mu_2]$*. Тогда для неустойчивости в целом программного многообразия* $\Omega(t)$ *относительно вектор-функции* ω *достаточно выполнения частотного неравенства* $\pi(\varpi) > 0$ *и если* $\pi(\infty) = 0$ *то* $\lim_{\varpi\to\infty}\varpi^2\pi(\varpi) > 0$.

1. *Еругин Н.П.* Построение всего множества систем дифференциальных уравнению, имеющих заданную интегральную кривую // Прикл. Мат. и мех., 1952. Т. 16., вып. 6. С. 653-670

2. *Жуматов С.С., Крементулло В.В., Майгарин Б.Ж.* Второй метод Ляпунова в задачах устойчивости и управления движением. Алматы. 1999. 228 с.

Журавлев Валерий Филиппович, доктор физ.-мат. наук, доцент,
Житомирский национальный агроэкологический университет, Украина,
e-mail: vfz2008@ukr.net

ЛИНЕЙНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ НОРМАЛЬНО РАЗРЕШИМЫХ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Журавлев В.Ф.

Пусть $\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_1), \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_2)$ - банаховы пространства ограниченных вектор-функций, определенных на конечном промежутке $\mathcal{I}$ со значениями, соответственно, в банаховых пространствах $\mathbf{B}_1$, $\mathbf{B}_2$ с супремум нормами [1], $\mathbf{B}$ - банахово пространство.

Рассмотрим задачу о необходимых и достаточных условиях разрешимости и структуре множества решений $z(t)\in\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_1)$ линейной краевой задачи

$$(Lz)(t)=\varphi(t),\quad \ell z(\cdot)=\alpha, \tag{1}$$

где $L:\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_1)\to\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_2)$ - линейный ограниченный обобщенно обратимый, а следовательно нормально разрешимый, оператор, $\ell:\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_1)\to\mathbf{B}$ - линейный ограниченный оператор, $\alpha\in\mathbf{B}$.

Нормально разрешимое уравнение $(Lz)(t)=\varphi(t)$ разрешимо для тех и только тех $\varphi(t)\in\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_2)$, которые удовлетворяют условию [2, 3] $(\mathcal{P}_{Y_L}\varphi)(t)=0$, где $\mathcal{P}_{Y_L}:\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_2)\to Y_L\subset\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_2)$ - ограниченный проектор на подпространство Y_L, $Y_L\cong N(L^*)$.

При этом его общее решение имеет вид $z(t)=(\mathcal{P}_{N(L)}\hat{z})(t)+(L^-\varphi)(t)$, где $\mathcal{P}_{N(L)}:\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_1)\to N(L)$ - ограниченный проектор на нуль-пространство $N(L)$, $\hat{z}(t)-$ произвольный элемент пространства $\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_1)$, L^- – ограниченный обобщенно-обратный оператор к оператору L.

Обозначим через $\mathcal{L}=\ell\mathcal{P}_{N(L)}:\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_1)\to\mathbf{B}$ - линейный ограниченный оператор, $\mathcal{P}_{N(\mathcal{L})}:\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_1)\to N(\mathcal{L})$, $\mathcal{P}_{Y_\mathcal{L}}:\mathbf{B}\to Y_\mathcal{L}$ - ограниченные проекторы, $\mathcal{L}^-$ - линейный ограниченный обобщенно-обратный оператор к оператору $\mathcal{L}$.

Теорема. Пусть $L:\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_1)\to\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_2)$ и $\mathcal{L}:\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_1)\to\mathbf{B}-$ обобщенно обратимые операторы. Тогда краевая задача (1) разрешима для тех и только тех $\varphi(t)\in\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_2)$ и $\alpha\in\mathbf{B}$, которые удовлетворяют условиям $(\mathcal{P}_{Y_L}\varphi)(t)=0$, $\mathcal{P}_{Y_\mathcal{L}}\{\alpha-\ell(L^-\varphi)(\cdot)\}=0$ и при этом имеет семейство решений $z(t)=(\mathcal{P}_{N(L)}\mathcal{P}_{N(\mathcal{L})}\hat{z})(t)+(G\varphi)(t)+(\mathcal{P}_{N(L)}\mathcal{L}^-\alpha)(t)$,

где $\hat{z}(t)$ - произвольный элемент банахова пространства $\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_1)$, $(G\varphi)(t)=(L^-\varphi)(t)-(\mathcal{P}_{N(L)}\mathcal{L}^-\ell(L^-\varphi)(\cdot))(t)$ - обобщенный оператор Грина.

1. *Хелемский А.Я.* Лекции по функциональному анализу / А. Я. Хелемский. - М.: МЦНМО, 2004. - 552 с.

2. *Boichuk A.A., Samoilenko A.M.* Generalised inverse operators and Fredholm boundary-value problems / A. A. Boichuk, A. M. Samoilenko. - Utrecht; Boston: VSP, 2004. - 317 p.

3. *Гохберг И.Ц., Крупник Н.Я.* Введение в теорию одномерных сингулярных интегральных операторов / И. Ц. Гохберг, Н. Я. Крупник. - Кишинев: Штиинца, 1973. - 426 с.

Клевчук Іван Іванович, кандидатфіз.-мат. наук, доцент,
ЧНУ імені Юрія Федьковича,
e-mail: klevchuk@yandex.ru;

БІФУРКАЦІЯ АВТОКОЛИВАНЬ ПАРАБОЛІЧНИХ СИСТЕМ ІЗ ЗАПІЗНЮЮЧИМ АРГУМЕНТОМ ТА МАЛОЮ ДИФУЗІЄЮ

Клевчук І.І.

Розглядається система

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \varepsilon D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + A_0 u + \varepsilon A_1 u + F(u, u(t-\Delta, x)) \tag{1}$$

з періодичною умовою

$$u(t, x+2\pi) = u(t, x), \tag{2}$$

де ε - малий додатний параметр, $\Delta > 0$, $u \in \mathbb{R}^2$, функція $F(u,v)$ п'ять раз неперервно диференційовна відносно своїх аргументів, $F(0,0) = 0$, причому F має в нулі порядок малості вище першого, $A_0 a = i\omega_0 a$, $\omega_0 > 0$, матриця $A_0 + \varepsilon A_1$ має пару власних значень вигляду $\tau(\varepsilon) \pm i\omega(\varepsilon)$, $\tau(0) = 0$, $\tau'(0) > 0$, $\omega(0) = \omega_0$, $D = diag(d_1, d_2)$, $d_1 > 0$, $d_2 > 0$.

Системі (1) поставимо у відповідність рівняння

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \varepsilon(\gamma + i\delta)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (\tau(\varepsilon) + i\omega(\varepsilon))w + (d_0 - ic_0)w^2\bar{w},$$

яке одержується за допомогою усереднення. Тут $\gamma = (d_1 + d_2)/2$, а сталі d_0 та c_0 залежать від власного вектора a.

Нехай $d_0 < 0$ і для деякого цілого n виконується нерівність $\gamma n^2 < \tau'(0)$. Тоді знайдеться таке $\varepsilon_0 > 0$, що при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ задача (1), (2) має періодичні відносно t розв'язки (біжучі хвилі)

$$u_n = \sqrt{\varepsilon(\tau'(0) - \gamma n^2)\,|\,d_0\,|^{-1}}\,(a\exp i\eta + \bar{a}\exp(-i\eta)) + O(\varepsilon),$$

де $\eta = \omega_n(\varepsilon)t + nx,\ \omega_n(\varepsilon) = \omega_0 + O(\varepsilon),\ n \in \mathbb{Z}.$ Для дослідження стійкості цих періодичних розв'язків потрібно записати рівняння у варіаціях і зробити усереднення. Тоді для коефіцієнтів Фур'є усередненої системи одержимо зліченну систему звичайних диференціальних рівнянь, яка розпадається на незалежні системи двох рівнянь.

Цей метод можна застосувати до дослідження періодичних режимів рівняння спінового горіння

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + \xi = 2\varepsilon\left[\frac{\partial \xi}{\partial t}\left(1 - \frac{4}{3}\left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)^2\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^3 \xi}{\partial t \partial x^2}\right], \quad \xi(t, x+2\pi) = \xi(t, x), \tag{3}$$

де ε - малий додатний параметр, $\rho > 0$. Біжучі хвилі задачі (3) мають вигляд $\xi_n(t,x) = \sqrt{1 - \frac{n^2}{\rho^2}}\cos(t + nx) + O(\varepsilon)$, де $n \in \mathbb{Z}$, $n^2 < \rho^2$. Біжучі хвилі $\xi_n(t,x)$ експоненціально орбітально стійкі тоді і тільки тоді, коли

$$n^2 < \frac{1}{6}(2\rho^2 + 1).$$

Ковальчук Вікторія Валентинівна, кандидат фіз.-мат.наук,доцент
Державний економіко-технологічний університет транспорту, Київ, Україна
e-mail: kovaltchukvv@ukr. net

ДО ПИТАННЯ ПРО ГРАНИЧНІ ЦИКЛИ МАЯТНИКОВОЇ СИСТЕМИ ЗІ СЛІДКУЮЧОЮ СИЛОЮ

КовальчукВ.В.

Маятникові коливальні системи широко використовуються в різноманітних технічних пристроях. При певних збуреннях порушуються умови нормального функціонування елементів указаних пристроїв як механічних систем і створюється загроза їх міцності та стійкості. Тому на сучасному етапі основними задачами фундаментальних досліджень динаміки маятникових систем є розробка математичного апарату для проведення нелінійного аналізу і дослідження якісних змін у фазових просторах багатоланкових маятників при зміні суттєвих параметрів.

Використовуючи формалізм Лагранжа, складаємо диференціальні рівняння збуреного руху триланкового маятника зі слідкуючою силою і приводимо ці рівняння до нормальної форми Коші:

$$\frac{dx}{dt} = F(x), \qquad (1)$$

де $x, F \in R^6$. Суттєвим (керуючим) параметром маятника вважаємо модуль P слідкуючої сили, яка прикладена на верхньому кінці перевернутого маятника. При кількісній зміні цього параметру і фіксованих значеннях інших параметрів у фазовому просторі відбуваються якісні зміни у многовиді станів рівноваги маятника. При малих значеннях P верхнє вертикальне положення рівноваги є асимптотично стійким. При поступовому збільшенні значення P цей стан рівноваги втрачає свою стійкість внаслідок біфуркацій або катастроф.

Для виявлення періодичних коливань маятника, дослідження їх стійкості та побудови розв'язку розглянемо поліноміальні апроксимації правих частин динамічної системи (1), обмежуючись першими трьома степенями відхилень змінних x_i (i = 1, …, 6) від їх незбурених значень. Після цього приводимо отриману систему до базису з власних векторів матриці лінеаризації A. Нехай при критичному значенні $P = P^*$ одна пара комплексно-спряжених власних значень матриці A має вигляд $\lambda_{1,2} = \pm i\,\omega$, а при $P \neq P^*$ маємо $\lambda_{1,2} = \varepsilon \pm i\,\omega$. Заміна змінних за формулою $x = \beta\xi$ приводить до системи, в якій перші два рівняння в координатній формі мають вигляд

$$\dot{\xi}_1 = \varepsilon\xi_1 - \omega\xi_2 + H_1(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_6),$$
$$\dot{\xi}_2 = \omega\xi_1 + \varepsilon\xi_2 + H_2(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_6).$$

Слід зазначити, що указані перетворення справедливі в деякому локальному околі межі $P = P^*$ області стійкості в просторі суттєвих параметрів досліджуваного маятника. Мірою близькості точки цього простору до межі є значення ε. Його приймаємо за малий параметр системи. При $\varepsilon = 0$ зображуюча точка досліджуваної динамічної системи перебуває на межі $P = P^*$, що відповідає парі суто уявних власних значень матриці лінеаризації системи (1). Періодичний розв'язок цієї системи в околі указаної межі можна подати у вигляді

$$x_i = \sqrt{\varepsilon} M_0 \left(B_{i1}^{(0)} \cos(\Omega t) + B_{i2}^{(0)} \sin(\Omega t)\right) + \varepsilon\sqrt{\varepsilon} D_i(t), \quad (i = 1, 2, \ldots, 6).$$

Розроблені Maple-програми, що дозволяють відповідно до наведеної формули вивчати граничні цикли шляхом їх візуалізації на фазовій площині та анімаційного моделювання збуреного руху маятника в околі положення рівноваги.

Гладун Володимир Романович, кандидат фіз.-мат. наук, доцент
Національний університет "Львівська політехніка", Львів, Україна,
e-mail: v_hladun@yahoo.com;
Матулка Катерина Василівна, аспірант, кафедра прикладної математики,
Національний університет "Львівська політехніка", Львів, Україна,
e-mail: katerynamatulka@gmail.com

ПРО ЗБІЖНІСТЬ ТА СТІЙКІСТЬ ДО ЗБУРЕНЬ ГІЛЛЯСТИХ ЛАНЦЮГОВИХ ДРОБІВ З ДОДАТНИМИ ЧАСТИННИМИ ЧИСЕЛЬНИКАМИ ТА ЗНАМЕННИКАМИ

Гладун В.Р., Матулка К.В.

Одним із найважливіших питань аналітичної теорії неперервних дробів та їх багатовимірних узагальнень - гіллястих ланцюгових дробів (ГЛД) є встановлення ефективних ознак збіжності та стійкості до збурень таких дробів.

Об'єктом дослідження є гіллястий ланцюговий дріб з додатними елементами

$$b_0 + \underset{k=1}{\overset{\infty}{D}} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{a_{i(k)}}{b_{i(k)}}, \tag{1}$$

де $N \in \mathbb{N}$ - кількість гілок розгалуження, $i(0) = i_0 = 0, i(k) = i_1 i_2 ... i_k, i_p = \overline{1, N}, p = \overline{1, k}, k = 1, 2, ...$, - мультиіндекси.

При дослідженні збіжності ГЛД з додатними елементами використовують формулу різниці двох підхідних дробів та деякі спеціальні нерівності, які дозволяють одержати оцінки похибок наближень.

Основні ознаки збіжності ГЛД з додатними частинними знаменниками та чисельниками рівними одиниці запропоновано в роботі [1].

Гіллястий ланцюговий дріб вигляду

$$\hat{b}_0 + \underset{k=1}{\overset{\infty}{D}} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{\hat{a}_{i(k)}}{\hat{b}_{i(k)}}, \tag{2}$$

називається збуреним гіллястим ланцюговим дробом до ГЛД (1).

ГЛД мають властивість обмеженого нагромадження похибок, що виникають в процесі їх обчислень. Аналіз оцінок похибок підхідних дробів показує, що вони залежать не тільки від похибок елементів, але і від самих елементів. Тому актуальними є задачі вивчення умов, при виконанні яких ГЛД є стійким до збурень їх елементів та побудови множин стійкості до збурень.

Встановлено ознаки збіжності та стійкості до збурень гіллястих ланцюгових дробів з додатними частинними чисельниками та знаменниками.

1. Боднар Д.И. Ветвящиеся цепные дроби / Боднар Д.И.– Киев: Наукова думка, 1986.– 176с.

Мороз Александра Михайловна, студентка 4 курса, факультет кибернетики,
Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, Киев, Украина
e-mail: alexandramoroz12@gmail.com

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ МОДЕЛИ ПРОЦЕССА РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЗАБОЛЕВАНИЯ

Мороз А.М.

В докладе рассматривается модель динамики заболеваний, представленная системой трех обыкновенных дифференциальных уравнений [1]. Вычислены особые точки и построен фазовый портрет системы в целом. В дальнейшем модель модифицирована за счет введения фактора запаздывания [2,3]. Исследована система с запаздыванием.

Пусть $S(t)$, $I(t)$, $R(t)$ число людей, подверженных заболеванию, заболевших и выздоравливающих. Здесь функция $f(S,I)$ характеризует число встреч людей, подверженных заболеванию $S(t)$ и заболевших $I(t)$. Предполагается, что заболевание передается только при встрече инфицированного и здорового человека. Тогда динамика распространения заболевания описывается следующей системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d}{dt}S(t) = -f(S(t),I(t)),\ \frac{d}{dt}I(t) = f(S(t),I(t)) - \gamma I(t),\ \frac{d}{dt}R(t) = \gamma I(t),\ \gamma > 0.$$

Здесь $\gamma > 0$ означает относительную скорость выздоровления. Слагаемое $\gamma I(t)$ выражает число людей, имеющих иммунитет или выздоравливающих. В качестве функции $f(S,I)$ можно выбрать $f(S,I) = \beta SI$, где β - постоянный параметр, характеризующий частоту встреч. Тогда получаем систему уравнений

$$\frac{d}{dt}S(t) = -\beta S(t)I(t),\ \frac{d}{dt}I(t) = \beta S(t)I(t) - \gamma I(t),\ \frac{d}{dt}R(t) = \gamma I(t),\ \gamma > 0.$$

В докладе проведено качественное исследование фазового портрета системы трех уравнений. Найдены особые точки, их исследование проведено с использованием метода линеаризации. Рассмотрена система, описываемая уравнениями с последействием запаздывающего типа

$$\frac{dS(t)}{dt} = \lambda - \mu S(t) - \beta S(t)I(t-\tau),\ \frac{dI(t)}{dt} = \beta S(t-\tau)I(t) - (\mu+\gamma)I(t),\ \frac{dR(t)}{dt} = \gamma I(t-\tau) - \mu R(t).$$

1. YoishiEnatsu, YukihikoNakata, YoshiakiMuroya, GiuseppeLissoandAntoniaVecchio. Global Dynamics of Difference Equations for SIR Epidemic Models with a Class of Nonlinear Incidence Rates // Journal of Difference Equations and Applications, iFirst article, 2011, pp.1-19.

2. Хейл Дж. Теория функционально дифференциальных уравнений. – М.: Мир, 1984. – 448 с.

3. Эльсгольц Л.Э., Норкин С.Б. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. – М.: Наука, 1970. – 240 с.

Мусурівський Віктор Іванович, кандидат фіз.-мат. наук, доцент,
Чернівецький національний університет імені Ю.Федьковича, Чернівці, Україна,
e-mail: victor_musa@ukr.net, victor_musa@i.ua
Ясинський Володимир Кирилович, доктор фіз.-мат. наук, професор,
Чернівецький національний університет імені Ю.Федьковича, Чернівці, Україна,

ПРОБЛЕМА СТАБІЛІЗАЦІЇ КЕРОВАНИХ СТОХАСТИЧНИХ ДИФЕРЕЦІАЛЬНО-ФУНКЦІОНАЛЬНИХ СИСТЕМ ІЗ СКІНЧЕННИМ ЗАПІЗНЕННЯМ.

Мусурівський В.І., Ясинський В.К.

Нехай $x(t)\in R^m$ - випадковий процес керованої стохастичної системи, що описується диферецiально-функціональними рівняннями з скінченним запізненням виду

$$dx(t)=a(t,x_t,u)dt+\sum_{k=1}^{m}b_k(t,x_t,u)dw_k(t),\ k=1,2,...,m, \tag{1}$$

із початковою умовою

$$x_{t_0}=z_0\in\mathbf{D}, \tag{2}$$

де $t\ge t_0\ge 0$; $x_t\equiv\{x(t+\theta)\}$, $-\tau\le\theta<0$, $\tau>0$; $\mathbf{D}\equiv\mathbf{D}([-\tau,0],R^m)$- простір Скорохода неперервних справа функцій, що мають лівосторонні границі [1]. $a(t,x_t,u)$, $b_k(t,x_t,u)$, $k=1,2,...,m$- вимірні по сукупності аргументів вектори-функціонали. $w_\kappa(t)$- незалежні в сукупності вінеровські процеси, де $\mathsf{E}w_\kappa(t)=0$, $\mathsf{E}w_k^2(t)=t$. Величина $u\equiv u(t,x(t))\in R^r$ -r-мірний керуючий вплив, є марковским процесом [1]. Внаслідок, випадковий процес $x(t,\omega)$, породжений (1), буде марковським [2].

Розглянемо *задачу оптимальної стабілізації* в розумінні заданого критерію якості: знайти допустиме керування $u\equiv u^o(t,x)$, при якому досягається мінімум функціоналу

$$J_{s,z}(u)=\int_s^\infty \mathsf{E}\{W(t,x_t,u(t,z))|x_t=z\}dt, \tag{3}$$

де (s,z)- фіксована початкова точка, $W(t,x,u)$- додатно визначений функціонал при $t\ge 0$.

Вірне наступне твердженняпро оптимальну стабілізацію:

Нехай існує функція $V^o(t,x)\in C_2^{(0)}(E)$, $u^o(t,x)\in\mathcal{U}$, що задовольняє при $\forall\, t\ge 0$, $x\in E_l$, $u\in(-\infty,\infty)$ та деяких додатних постійних p, n, k_1,k_2 наступним умовам:

$$V^o(t,x)\le k_1|x|^p,\quad \left|\frac{\partial V^o}{\partial x}\right|\le k_1(|x|^p+1), \tag{4}$$

$$\mathcal{L}_{u^o}V^o(t,x)+W(t,x,u^o(t,x))\equiv 0, \tag{5}$$

$$\mathcal{L}_uV^o(t,x)+W(t,x,u)\ge 0, \tag{6}$$

$$W(t,x,u)\ge k_2|x|^p, \tag{7}$$

де $\|x(\theta)\|=\sup\limits_{\tau\le\theta\le 0}|x(\theta)|$, $\dfrac{\partial V^o}{\partial x}$-похідна Фріше, $\mathcal{L}_u$-інфінітезимальний оператор процесу $x(t,\omega)$. Тоді функція керування $u^o(t,x)$ являється розв'язком задачіпро оптимальну стабілізацію системи(1)-(2) урозумінні критеріюякості $J_{s,z}(u)$

$$J_{s,x^o}(u^o)=\min_{u\in\mathcal{U}}J_{s,x^o}(u)=V^o(s,x^o). \tag{8}$$

1. Гихман И. И., Скороход А.В. Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения. — Київ: Наукова думка, 1982. — 612 с.

2. Хасьминский Р.З. Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. — М: Наука, 1969. — 369 с.

Зуев Александр Леонидович, доктор физ.-мат. наук, ведущий научный сотрудник,
Институт математики НАН Украины, Киев, Украина,
Max Planck Institute for Dynamics of Complex Technical Systems, Magdeburg, Germany
e-mail: zuyev@mpi-magdeburg.mpg.de
Новикова Юлия Викторовна, младший научный сотрудник,
Институт математики НАН Украины, Киев, Украина,
e-mail: yuliya.novikova.88@mail.ru;

ОЦЕНКА МНОЖЕСТВА ДОСТИЖИМОСТИ БЕСКОНЕЧНОМЕРНОЙ КОЛЕБАТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ С НЕСОИЗМЕРИМЫМИ ЧАСТОТАМИ

Зуев А.Л., Новикова Ю.В.

В работе рассматривается бесконечная система дифференциальных уравнений с одномерным управлением следующего вида:

$$\dot{q} = Aq + Bu, \tag{1}$$

$$q = \begin{pmatrix} q_{-1} \\ q_1 \\ q_{-2} \\ q_2 \\ \vdots \end{pmatrix} \in \ell^2,\ A = i\begin{pmatrix} \omega_1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -\omega_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \omega_2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & -\omega_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},\ B = i\begin{pmatrix} B_{-1} \\ B_1 \\ B_{-2} \\ B_2 \\ \vdots \end{pmatrix},\ u \in \mathbb{R}^1.$$

Система (1) была введена в работах [1,2] для описания малых колебаний пластины Кирхгофа, присоединенной к вращающемуся твердому телу. Компоненты q_n, q_{-n} фазового вектора q соответствуют моде колебаний пластины с индексом n; ω_n, B_n, B_{-n} - вещественные коэффициенты. В статье [1] приведены выражения коэффициентов системы (1) через механические параметры пластины Кирхгофа. В данной работе предполагается, что $\chi = \left(l_2 / l_1\right)^2$ - алгебраическое число степени $n^* \geq 2$, где l_1 и l_2 - стороны прямоугольной области, которая соответствует срединной поверхности пластины в недеформированном состоянии.

Для любых $q^0 \in \ell^2,\ u = u(t) \in L^2(0,\tau),\ \ \tau > 0,$ существует единственное обобщенное решение системы (1): $q(t;q^0,u) = e^{tA}q^0 + \int_0^t e^{(t-s)A}Bu(s)ds,\ 0 \leq t \leq \tau,$ которое удовлетворяет начальному условию $q|_{t=0} = q^0$.

Основным результатом работы является теорема об оценке состояний $q^1 \in \ell^2$ системы (1), которые приближенно достижимы из точки $q^0 = 0 \in \ell^2$ за время $\tau > 0$.

Теорема. Пусть для системы (1) выполнены условия:

1) $B_n \neq 0,\ n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots;$ 2) Координаты вектора $q^1 = \left(q^1_{-1}, q^1_1, q^1_{-2}, q^1_2, \ldots\right)^T \in \ell^2$ удовлетворяют условиям: $q^1_{-n} = \overline{q^1_n},\ \ |q^1_n| = O\left(\frac{1}{n^\gamma}\right),\ \ \gamma > 3n^*/2 + 1,\ n \in \mathbb{N}$.

Тогда для всякого $\varepsilon > 0$ найдутся такие числа $\tau = \tau(\varepsilon) > 0$ и $N(\varepsilon) \geq 1$, что

$$\| q(\tau;0,\hat{u}_N) - q^1 \|_{\ell^2} < \varepsilon, \tag{2}$$

где $\hat{u}_N(t) = \sum_{n=1}^{N}(B_n e^{i\omega_n t}\nu_{-n} + B_{-n}e^{-i\omega_n t}\nu_n),\ \ t \in [0;\tau].$

1. Зуев А.Л., Новикова Ю.В. Малые колебания пластины Кирхгофа с двумерным управлением// Механика твердого тела. - 2011. - Вып. 41. - С. 187-198.

2. Zuyev A. Partial stabilization and control of distributed parameter systems with elastic elements. - Cham Heidelberg: Springer, 2015. - 232 p.

Нікітін Анатолій Володимирович, кандидат фіз.-мат. наук, доцент
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ, Україна
e-mail: anisimovnik@ukr.net
Баляснікова Оксана Алеодорівна, старший викладач,
Чернівецький факультет НТУ «ХПІ», Чернівці, Україна,
e-mail: oksana.balyasnikova@gmail.com

СТІЙКІСТЬ ЛІНІЙНИХ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ВИПАДКОВИМИ ЛІНІЙНИМИ СТРИБКАМИ РОЗВ'ЯЗКІВ У ГІЛЬБЕРТОВИХ ПРОСТОРАХ

НікітінА.В., БалясніковаО.А.

До вивчення стійкості розв'язків стохастичних рівнянь можливо застосувати різні підходи. Якщо відомі розв'язки таких рівнянь, то інколи застосовують прямий метод дослідження стійкості або асимптотичної стійкості. Інший підхід базується на введенні стохастичних функцій Ляпунова та застосування аналога другого методу Ляпунова. Якщо відомі моментні функції або рівняння для моментних функцій, то тоді задачі дослідження стійкості в середньому квадратичному зводиться до аналізу поведінки таких функцій. Застосуємо останній підхід на прикладі дослідження асимптотичної стійкості тривіального розв'язку системи стохастичних диференціальних рівнянь.

Постановка задачі. Розглянемо марковський процес $\xi(t)$, що може перебувати у станах $\theta_1, \theta_2, ..., \theta_n, ...$ з імовірностями

$$p_k(t) = \mathrm{P}\{\xi(t) = \theta_k\} \ (k = 1,2,...), \tag{1}$$

які задовольняють системі диференціальних рівнянь

$$\frac{dp_k(t)}{dt} = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{ks} p_s(t). \tag{2}$$

Марковський процес $\xi(t)$ стрибком змінює своє значення у випадкові моменти часу t_j $(j = 0,1,2,...)$.

Поряд з марковським процесом $\xi(t)$ розглянемо систему лінійних диференціальних рівнянь

$$\frac{dX(t)}{dt} = AX(t), \ t \neq t_j \ (j = 0,1,2,...), \tag{3}$$

яка в момент часу t_j стрибком змінює своє значення за законом

$$X(t_j + 0) = C_{ks} X(t_j - 0), \tag{4}$$

при переході випадкового процесу зі стану θ_s у стан θ_k $(k \neq s)$, C_{ks} – сталі матриці.

Розв'язок системи (3) є випадковим процесом. Дослідимо стійкість в середньому та стійкість в середньому квадратичному розв'язків системи лінійних диференціальних рівнянь (3). При цьому виведемо рівняння для визначення необхідних та достатніх умов асимптотичної стійкості.

1. Гихман И. И., Скороход А. В. Стохастические дифференциальные уравнения и их применение. - Киев: Наука. Думка, 1982. – 612 с.

2. Скороход А. В. Асимптотические методы теории стохастических дифференциальных уравнений. К.: Наука. Думка, 1987. – 328 с.

Ободан Наталия Ильинична, д-р. техн. наук, профессор
Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара, Днепропетровск, Украина
Гук Наталия Анатольевна, д-р. физ.-мат. наук, профессор
Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара, Днепропетровск, Украина
e-mail:nataly-guk@rambler.ru
Фещенко Анна Сергеевна, аспирант
Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара, Днепропетровск, Украина

КОЭФФИЦИЕНТНАЯ ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ТОЧЕКВЕТВЛЕНИЯ УРАВНЕНИЯ КАРМАНА

Ободан Н.И., Гук Н.А., Фещенко А.С.

Рассматривается задача определения таких коэффициентов $H(X)$ нелинейных эллиптических уравнений типа Кармана, чтобы при заданной правой части реализовалась точка ветвления. При этом коэффициенты должны удовлетворять заданным условиям $\int_{\Omega} F(H)d\Omega \underset{H}{\Rightarrow} min$. Краевая задача имеет вид: $\nabla A_1(H)\nabla u_1 + B_1(H)u_{2,xx} + L(u_1,u_2) + \lambda z = 0$;

$$\nabla A_2(H)\nabla u_2 + B_2(H)u_{1,xx} + 1/2\,L(u_1,u_1) = 0 \text{ при } U_\Gamma = 0;\ \partial U/\partial n|_\Gamma = 0;\ U \in W_{2\Omega}^2, \quad (1)$$

где ∇ – оператор Лапласа; $\Omega: \{X = (x,y) |\ a_1 \le x \le b_1\ \ a_2 \le y \le b_2\}$ – Липшицева область с гладкой границей Γ; $U = (u_1,u_2)$ – неизвестная вектор функция; $A_i(H)$, $B_i(H)$ – заданные функционалы; $L(v,w) = \partial^2 v/\partial x^2\ \partial^2 w/\partial y^2 + \partial^2 v/\partial xy\ \partial^2 w/\partial xy + \partial^2 v/\partial y^2\ \partial^2 w/\partial x^2$.

Известно, что при определенных видах правой части краевая задача (1) имеет точки ветвления (λ^*, U^*)[1], при этом зависимость параметра λ^* от изменяемости правой части или коэффициентов A_i, B_i немонотонна с чередующимися минимумами и максимумами, поэтому здесь неприменим обычно используемый метод малого параметра.

Условием ветвления выступают линейные уравнения относительно приращений $\tilde{U}$, для которых обобщенное решение (λ^*, U^*) записывается как $M(H) = a_H(\tilde{U},v) - b_H(\lambda^*,\tilde{U},v) = 0$, при $\tilde{U}^* \ne 0$; $v, \tilde{U}^* \in W_{2\Omega}^2$, $v = (v_1,v_2)$; a_H – билинейная относительно $\tilde{U}, v$ симметричная коэрцитивная форма; b_H – симметричная форма, зависящая от λ нелинейно; $i = 1,2$.

Необходимо при фиксированном $\lambda_{кр}^*$ найти такую функцию H^* из допустимого множества $\tilde{H}: \{H |\ H \in W_{2\Omega}^1; \|H\|_{W_{2\Omega}^1} \le C;\ \underline{H} \le H \le \overline{H},\ M(H^*,\lambda^*) = 0\}$; $\underline{H}, \overline{H} > 0$, чтобы выполнялось условие $H^* = \underset{H^* \in \tilde{H}}{arg\,inf}\ J(H^*)$, где $J(H) = \int \frac{1}{2} H^{*2} + \psi_1(H - \underline{H})^2 + \psi_2(\underline{H} - H) + \varphi(\lambda_{min}^* - \lambda_{кр})^2$ – функция цели.

Непрерывность отображения $H \to L(H,\lambda^*)$ и существование частных производных $a'_{H_0 H}$, $b'_{H_0 H}$, $b'_{H,\lambda}$ доказывается путем построения производной Фреше от $L(H,\lambda)$ в точке (H_0, λ_0). Условия стационарности функционала $J(H)$ дают систему разрешающих уравнений $\Phi(H,\varphi,\psi) = 0$. В численном эксперименте определялся вид функции $H(X)$, удовлетворяющий заданному критерию, при различных заданных $A_i(H)$, $B_i(H)$ и правой части.

1. Obodan Natalia I. Nonlinear behavior and stability of thin-walled shells / N.I. Obodan, O.G. Lebedeyev, V.A. Gromov. Springer, 2013. – 180 p.

2. Литвинов В.Г. Оптимизация в эллиптических граничных задачах с приложениями к механике / В.Г. Литвинов. – М.: Наука, 1987. – 366 с.

Онищук Василь Варфоломійович, кандидат технічних наук, старший науковий співробітник
Київський національний університет імені Тараса Шевченка. Географічний факультет
e-mail: willy38@ukr.net

РОЗВ'ЯЗОК, ІНТЕРПРЕТАЦІЯ І ПРАКТИЧНЕ ВИКОРИСТАННЯ ТЕОРЕМИ БЕРЧА - СВІННЕРТОН-ДАЙЄРА

Онищук В.В.

Відома на сьогоднішній день теорема Берча – Свіннертон-Дайєра має наступний вигляд [1]

$$B_E = \lim_{s\to 1} \frac{L(E,s)}{(s-1)^r} \qquad (1)$$

Допускається, що ранг r еліптичної кривої E при Q рішень домірний нулю дзета-функції Хоссе-Вейля E(L,s) в точці s=1.Пропонується інша інтерпретація цієї теореми, при умові, що розглядається гіперболічна крива у замкнутому вигляді згідно рівняння

$$x^3 + y^3 + z^3 = 1 \qquad (2)$$

Рівняння (2) рішається наступним чином: на самому початку розглядається модель кулі, для якої x = y = z = const/1. І, якщо, розділити «1» на «3», то отримаємо ірраціональне число 0,3333333333 (0,3!), що характеризує значення координат даної моделі, а також рівень її динамічної стійкості (характеризує її нестійкий стан).

Другим етапом розв'язування рівняння є установлення шляхом послідовного підбору значення координати z й відповідно x і y для моделі у вигляді гіперболоїда, як установлено, що z находяться у процентному співвідношенні, до *x* і *y* в наступному вигляді:

$$[(33,3!+24,59543165)/2]/(33,3!-24,59543165) \qquad (3)$$

Співвідношення (3) вказує на те, що z орієнтовно на 12,3% менше від x і y.

Дальше находимо значення координат x, y і z з використанням даного співвідношення:

* x = y = 0,3333333333 + (0,3333333333 × 24,59543165)/ 100 = 0,3333333333 + 0,0819847721 = = 0,4153181054;

* z = 0,3333333333 – 0,0819847721 = 0,2513485612.

І насамкінець, розв'язування рівняння (2) завершується наступним чином:

* $(x^3 + y^3 + z^3)\,2\pi = (0,4153181054^3 + 0,4153181054^3 + 0,2513485612^3) \times 2 \times 3,141592759 =$
$(0,0716378581 +$
$+ 0,0716378581 + 0,015879221) \times 6,283185518 = 1.$

Отримане раціональне число відповідає стійкому стану гіперболоїда, який обертається навколо своєї осі, тобто при наявності чотирьох центрів/точок у гіперболічної замкнутої кривої - s=4. Після цього, ліва частина формули (1) буде дорівнювати (при обмежені E=1, r = 0,75)

$$\lim_{s\to 4} \frac{L(E_4)}{(4-1)^r} = 1,33!\cdot$$

B_E = 1,33! відповідає чотирьом центрам маси гіперболоїда. Навколо цих центрів відбувається концентрація електромагнітного поля, що обумовлює послаблення дії гравітаційного поля і відповідно забезпечує стійкість об'єкта в оточуючому середовищі. Що стосується ефекту заміщення полів, то треба відмітити наступне: до теперішнього часу є відомими чотири фізичних закони, які називають нютоновськими. І вони були достатніми для вирішення земних проблем. Але у найближчій перспективі, коли відбудуться польоти до найближчих планет Сонячної системи, то нам знадобиться мати чіткі уявлення про процеси взаємодії між гравітаційним полем і електромагнітним.

Ефект взаємодії поміж гравітаційним полем і електромагнітним. Для швидких і безпечних польотів космічних кораблів необхідно нейтралізувати дію гравітаційного поля. Здійснити це можна за допомогою роботи двох, об'єднаних в один комплекс, електромагнітних двигунів. Робоча модель комплексу складається з двох електромагнітних двигунів які розміщуються один від одного на віддалі 1200 мм. Робота електромагнітного комплексу здійснює зміщення полів, при якому у нейтральній зоні анігілюються сили гравітації. При польоті космічного гіперболоїдного корабля його траса проходитиме саме по цій нейтральній зоні. Слід відмітити, що найбільш економічний шлях польоту корабля при посадці або підйомі є переміщення (ковзання) по меридіанах магнітних решіток планет.

Висновок. Викладений вище матеріал дає можливість зробити наступне узагальнення стосовно поведінки космічних об'єктів. Форма об'єкта у вигляді гіперболоїда є оптимальною, що забезпечує самий високий рівень динамічної його стійкості. У цьому контексті слід зауважити, що наша планета є недостатньо стійкою, оскільки вона орієнтовно на 30% відрізняється від форми гіперболоїда.

1. [Електрон. ресурс]. Режим доступу: https://ru.wikipedia.org/wiki/Гипотеза Берча-Свиннертон-Дайера

Осипова Олександра Володимирівна, аспірант,
Чернівецькийнаціональний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці, Україна,
e-mail: shurenkacv@gmail.com,
Черевко Ігор Михайлович, доктор фіз..-мат. наук, професор,
Чернівецькийнаціональний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці, Україна,
e-mail: i.cherevko@chnu.edu.ua.

ДЕКОМПОЗИЦІЯ РІЗНОТЕМПОВИХ ЛІНІЙНИХ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНИХ СИСТЕМ МЕТОДОМ ІНТЕГРАЛЬНИХ МНОГОВИДІВ

Осипова О.В., Черевко І.М.

Досліджується схема декомпозиції лінійних сингулярно збурених систем з багатьма малими параметрами, що базується на ідеях теорії інтегральних многовидів повільних та швидких змінних. Основи такого підходу для сингулярно збурених систем з одним малим параметром розглядались в [1,2], а для систем з декількома малими параметрами в [3,4].

Розглядається лінійна сингулярно збурена система

$$\prod_{j=0}^{i}\varepsilon_j\dot{x}_i=\sum_{j=0}^{k}A_{ij}(t)x_j,\quad \mathrm{i}=\overline{0,k}, \tag{1}$$

де $x_i\in\mathbb{R}^{n_i}, i=\overline{0,k}, A_{ij}(t), i, j=\overline{0,k},$ – $n_i\times n_j$-матриці, $\varepsilon_0=1,\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_k$ – малі додатні параметри.

Припустимо, що для системи (1) справджуються умови:

матриці $A_{ij}(t), i, j=\overline{0,k},$ рівномірно обмежені для $t\in\mathbb{R}$,

власні значення $\lambda_i=\lambda_i(t), i=\overline{1,n_j},$ матриць $A_{jj}(t),\ \mathrm{j}=\overline{1,k},$ задовольняють нерівність $\mathrm{Re}\,\lambda_i\le -2\beta<0.$

матриці $A_{ij}(t), i, j=\overline{0,k},$ $A_{kk}^{-1}(t)$ рівномірно обмежені для $t\in\mathbb{R}$ разом зі своїми похідними до (n+1) порядку.

Теорема. Нехай справджуються умови 1)-3). Тоді для достатньо малих $\varepsilon_i, i=1,2,\ldots,k$ існує заміна змінних за допомогою якої система (1) зводиться доблочно-трикутного вигляду

$$\dot{y}_0^k=B_{00}^k y_0^k,\quad \prod_{j=0}^{i}\varepsilon_j y_i^{k+1-i}=B_{ii}^{k+1-i}y_i^{k+1-i}, i=\overline{1,k}. \tag{2}$$

Точний вигляд розщеплюючого перетворення вдається знайти тільки у найпростіших випадках. У роботі запропонована методика побудови асимптотичних розкладів коефіцієнтів розщеплюючого перетворення у вигляді рекурентних алгебраїчних співвідношень.

1. Sobolev V.A. Decomposition of linear singularly perturbed systems // Acta Math. Hung.− 1987.− 49, N3-4.− P.365−376.

2. Schepakina E.A., Sobolev V.A., Mortell M.P. Singular Perturbations: Introduction to system order reduction methods with applications. – Berlin: Springer, 2014. – 224p.

3. Воропаева Н.В., Соболев В.А. Геометрическая декомпозиция сингулярно возмущенных систем. – М.: Физматлит, 2009. – 255с.

4. Осипова О.В., Черевко І.М. Асимптотична декомпозиція лінійних сингулярно збурених систем // Буковинський математичний журнал. – 1, № 3-4. – Чернівці: Чернівецький нац. ун-т, 2013. – С. 114-118

Полетаев Геннадий Степанович, *кандидат физ.-мат. наук, доцент*
Одесская государственная академия строительства и архитектуры, Одесса, Украина
E-mail: poletayev_gs@ukr.net

ПОДВИД ДВУЧЛЕННЫХ ДВУПРОЕКТОРНЫХ ПЕРВОГО ПОРЯДКА УРАВНЕНИЙ С ПРАВИЛЬНО ФАКТОРИЗУЕМЫМИ ПО ПАРЕ ПОДКОЛЕЦ КОЭФФИЦИЕТНТАМИ

Полетаев Г.С.

Продолжая [1-3], пару подколец $\left(R^+, R^-\right)[\equiv\left(R^-, R^+\right)]$ кольца R с единицей e будем называть его факторизационной парой (ФП), если она порождена действующими в R коммутирующими проекторами $p^+, p^-: R^{\mp} = p^{\mp}(R)$, и выполняются следующие аксиомы (ср. [4]): $e \in R^0\left(= R^{\mp} \cap R^{\pm}\right)$; $p^0 (= p^{\mp} p^{\pm})$ – кольцевой гомоморфизм R^+ *и* R^- *в* R^0; $R^+R^-, R^-R^+ \subseteq R^+ + R^-$ $\left(:= R^*\right)$. Всякое кольцо с единицей, рассматриваемое вместе с его фиксированной ФП называется кольцом с этой факторизационной парой.

Рассматривается абстрактное уравнение относительно неизвестных $x^+ \in R^+, x_- \in R_-$ вида:

$$ax^+ + x_- = b\ , \tag{1}$$

где $a, b \in R$ известные элементы; $p_- = p^- - p^0$. Уравнение (1), изучаемое в кольце R с ФП можно трактовать как подвид абстрактных двупроекторных двучленных первого порядка уравнений в кольце с ФП [1]. Это же уравнение возникает при исследовании первого уравнения (1) [2]. Уравнение (1) в кольце с ФП можно исследовать на основе результатов из [1,2] или указанными в этих работах методами, непосредственно. Имеет место

Теорема 1. Пусть $R = R^*$ – ассоциативное, вообще, некоммутативное кольцо с единицей e, ФП (R^+, R^-) и коэффициент $a \in R$ имеет в R обратный a'. Если при этом обратный элемент a' допускает в R нормированную правильную левую факторизацию (*н.п.l.ф.*) [2] по ФП (R^+, R^-): $a' = r^+ s^0 t^-$, тогда при любой правой части $b \in R$ уравнение (1) имеет в R одно и только одно решение $x^+ \in R^+, x_- \in R_-$. Его можно определить по формулам:

$$x^+ = r^+ s^0 [t^- b^+]^+, x_- = b_- + t^{-'}[t^- b^+]_- \ (= t^{-'}[t^- b]_-). \tag{2}$$

В конкретных кольцах с ФП, можно реализовать результат для соответствующих матричных уравнений с двумя неизвестными треугольными матрицами;- для «родственной» типа Римана-Гильберта-Привалова задачи;- для интегрального уравнения типа свёртки [3, 5,6]:

$$x(t) - \int_0^{\infty} k(t-s)x(s)ds = f(t), -\infty \prec t \prec \infty,$$

связанного с интегральным типа Винера-Хопфа.

1. Полетаев Г.С.//AMADE.Тез. докл. МНК посв.100-л. ак.Ф.Д.Гахова. Минск, Беларусь,2006/ - С.100.

2.Полетаев Г.С. Об уравнениях и системах одного типа в кольцах с факторизационными парами / К.-1988. – 20 с. – (Преп. / АН УССР. Ин-т матем.; 88.31) .

3.Полетаев Г.С., Войтик Т.Г., Яценко С.А. // Глушковські читання НТУУ «КПІ», К.-2013.- С. 74-77.

4. McNabbA., SchumitzkyA.// J. Funct. Anal. – 1972. –v. 9, № 3. – P. 262 – 295.

*5. Крейн М. Г.*Интегральные уравнения на полупрямой с ядром, зависящим от разности аргументов // Успехи математических наук. – 1958. – 13, вып. 5. – С. 3 – 120.

*6. Полетаев Г. С.*О постановках, матричных моделях некоторых обратных задач / Матем. модел. в образовании, науке и пром. – Международная академия наук ВШ. – С.-Пб. – 2000. – С. 146 – 148

Савченко Нина Валериевна, асистент,
Национальный аэрокосмический университет им. М.Е. Жуковского "ХАИ``, Харьков, Украина,
e-mail: nina_savchenko@hotmail.com;
Пузырев Владимир Евгеньевич, доктор физ.-мат. наук, профессор,
Донецкий национальный университет, Винница, Украина,

ПОСТРОЕНИЕ ФУНКЦИИ ЛЯПУНОВА ДЛЯ МОДЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ В КРИТИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ ЧИСТО МНИМЫХ КОРНЕЙ

Савченко Н.В., Пузырев В.Е.

В данной работе предложен способ построения функции Ляпунова для системы специального вида порядка $2m+l$, характеристическое уравнение линейного приближения которой имеет m пар чисто мнимых корней и l корней с отрицательной вещественной частью. Рассмотрена задача устойчивости нулевого решения для системы ОДУ вида

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \sum_{s=1}^{l} \xi_s \mathbf{C}^{(s)}\mathbf{x}, \quad \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{B}\mathbf{x} + \sum_{s=1}^{2m} x_s \mathbf{D}^{(s)}\mathbf{x}. \tag{1}$$

Здесь $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{2m}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{l}, \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}^{(s)}$ $(s = \overline{1,2m})$ – вещественные квадратные матрицы, $\mathbf{D}^{(j)}$ $(j = \overline{1,2m})$ – вещественные прямоугольные матрицы порядка $l \times 2m$. Собственные значения матрицы $\mathbf{A}$ суть $\pm i\omega_1, \cdots \pm i\omega_m (0 < \omega_1 < \cdots < \omega_m)$, вещественные части собственных значений матрицы $\mathbf{B}$ отрицательны.

Функция Ляпунова (ФЛ) строится согласно общей методике, предложенной А.Я. Савченко [1] и несколько модифицированной, с учетом особенностей задачи.

С помощью линейного невырожденного преобразования критических переменных $\mathbf{x} = \mathbf{L}\mathbf{z}$ приведем систему (1) к виду

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt} = \mathbf{J}\mathbf{z} + \sum_{s=1}^{l} \xi_s \mathbf{C}_{\star}^{(s)}\mathbf{z}, \quad \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{B}\mathbf{x} + \sum_{s=1}^{2m} z_s \mathbf{D}^{(s)}\mathbf{z}. \tag{2}$$

Здесь $\mathbf{J} = \mathrm{diag}(i\omega_1, \cdots, i\omega_m, -i\omega_1, \cdots, -i\omega_m)$ – жорданова форма матрицы $\mathbf{A}$, $\mathbf{z} = (\mathbf{y}, \bar{\mathbf{y}})^T$, $\mathbf{C}_{\star}^{(s)} = \mathbf{L}^{-1}\mathbf{C}^{(s)}\mathbf{L}$, элементы матриц $\mathbf{D}^{(s)}$ известным образом выражаются через элементы матриц $\mathbf{D}^{(s)}, \mathbf{L}$. Черта сверху означает комплексное сопряжение, верхний индекс T – транспонирование.

Выберем функцию Ляпунова в виде

$$V(\mathbf{z},\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j y_j \bar{y}_j + \alpha_{m+1} V^{(2)}(\mathbf{x}) + V^{(3)}(\mathbf{z},\mathbf{x}) + V^{(4)}(\mathbf{z}), V^{(3)} = \sum_{s=1}^{l} \xi_s V_s^{(2)}(\mathbf{z}) \tag{3}$$

где α_j $(j = \overline{1,m}), \alpha_{m+1}$ - некоторые вещественные постоянные, $V^{(2)}$- положительно-определенная квадратичная форма, $V_s^{(2)} = \mathbf{z}^T \mathbf{K}^{(s)} \mathbf{z}$, элементы матриц $\mathbf{K}^{(s)}$ определяются из системы линейных алгебраических уравнений. Функцию V можно подобрать таким образом, что $\dot{V} = \dot{V}_0 + o(\dot{V}_0)$, где $\dot{V}_0 = \dot{V}^{(2)}(\mathbf{x}) + (\mathbf{r}, \mathbf{G}\mathbf{r})$, при этом форма $\dot{V}^{(2)}(\mathbf{x})$ является знакоопределенной. Здесь $\rho_j = y_j \bar{y}_j$. Соотношения между элементами матрицы $\mathbf{G}$ определяют условия устойчивости (асимптотической) или неустойчивости изучаемого движения. Сформулированы и доказаны два вспомогательных утверждения.

В качестве примера рассмотрен вопрос об устойчивости положения равновесия двойного математического маятника с присоединенным элементом. Показано, что добавление массы делает положение равновесия маятника асимптотически устойчивым.

1. Савченко А.Я., Игнатьев А.О. Некоторые задачи устойчивости неавтономных динамических систем. -- Киев: Наук. думка, 1989. - 208 с.

Скрипник Наталия Викторовна, кандидат физ.-мат. наук, доцент,
ОНУ имени И.И.Мечникова, Одесса, Украина,
e-mail: talie@ukr.net

УСРЕДНЕНИЕ ИМПУЛЬСНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ С НЕЧЕТКОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ

Скрипник Н.В.

Введем в рассмотрение пространство $\mathbb{E}^n$ отображений $u:\mathbb{R}^n \to [0,1]$, удовлетворяющих следующим условиям: 1) $u-$ нормально; 2) $u-$ нечетко выпукло; 3) $u-$ полунепрерывно сверху по Бэру; 4) замыкание множества $\{y \in \mathbb{R}^n : u(y) > 0\}$ компактно.

Рассмотрим импульсное дифференциальное включения с нечеткой правой частью

$$x' \in \varepsilon F(t,x),\ t \neq \tau_i,\ x(0) = x_0, \tag{1}$$
$$\Delta x|_{t=\tau_i} \in \varepsilon I_i(x).$$

Если для любых $t \geq 0, x \in G$ существует предел

$$\bar{F}(x) = \lim_{T\to\infty}\left(\frac{1}{T}\int_t^{t+T} F(t,x)dt + \frac{1}{T}\sum_{t\leq\tau_i<t+T} I_i(x)\right), \tag{2}$$

то в соответствие включению (1) поставим следующее усредненное дифференциальное включение с нечеткой правой частью

$$y' \in \varepsilon\bar{F}(y),\ y(0) = x_0. \tag{3}$$

Теорема. Пусть в области $Q = \{t \geq 0, x \in G \subset \mathbb{R}^n\}$, где G выпукло, выполняются следующие условия:

1) нечеткие отображения $F: Q \to \mathbb{E}^n$, $I_i: G \to \mathbb{E}^n$ непрерывны, равномерно ограничены постоянной M, удовлетворяют условию Липшица по x с постоянной λ и вогнутозначны по x;

2) равномерно относительно $t \geq 0$ и $x \in G$ существует предел (2) и $\frac{1}{T} i(t,t+T) \leq \nu,\ \nu < \infty,$ где $i(t,t+T)-$ количество точек последовательности τ_i на промежутке $(t,t+T]$;

3) для любых $x_0 \in G' \subset G$ и $t \geq 0$ $\alpha-$ решения включения (3) вместе с $\rho-$ окрестностью принадлежат области G для всех $\alpha \in [0,1]$.

Тогда для любых $\eta \in (0,\rho]$ и $L > 0$ существует $\varepsilon^0(\eta, L) > 0$ такое, что для всех $\varepsilon \in (0,\varepsilon^0]$ и $t \in [0, L\varepsilon^{-1}]$ справедливо неравенство $D(X(t),Y(t)) < \eta,$ где $X(t)-$ множество решений включения (1), $Y(t)-$ множество решений включения (3).

Отдельно выделяется периодический случай, в котором может быть получена более точная оценка.

Также рассматриваются схемы частичного усреднения, ступенчатого усреднения и усреднения в случае отсутствия среднего (2).

1. Скрипник Н.В. Усреднение испульсных дифференциальных включений с нечеткой правой частью / Н.В. Скрипник // УМЖ. - 2014. - Т.66, №11. - С. 1563 - 1577.

2. Skripnik N. Step scheme of averaging method for impulsive differential inclusions with fuzzy right-hand side / N. Skripnik // Contemporary Methods in Mathematical Physics and Gravitation. - Vol.1, №1. - 2015. - P. 9-26.

Слюсарчук Василь Юхимович, доктор фіз.-мат. наук, професор,
Національний університет водного господарства та природокористування, Рівне, Україна,
e-mail: V.Yu.Slyusarchuk@nuwm.edu.ua

МАЙЖЕ ПЕРІОДИЧНІ РОЗВ'ЯЗКИ НЕЛІНІЙНИХ ФУНКЦІОНАЛЬНО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Слюсарчук В.Ю.

Нехай E - банаховий простір з нормою $\|\cdot\|_E$, C^0 - банаховий простір обмежених і неперервних на $\mathbb{R}$ функцій $x = x(t)$ зі значеннями в E з нормою $\|x\|_{C^0} = \sup_{t\in\mathbb{R}} \|x(t)\|_E$, C^n - банаховий простір функцій $x \in C^0$, для кожної з яких $dx/dt, \ldots, d^n x/dt^n \in C^0$, з нормою $\|x\|_{C^n} = \max\left\{\|x\|_{C^0}, \|dx/dt\|_{C^0}, \ldots, \|d^n x/dt^n\|_{C^0}\right\}$ і B^n - банаховий простір майже періодичних функцій $x \in C^n$ з нормою $\|\cdot\|_{B^n} = \|\cdot\|_{C^n}$.

Зафіксуємо довільні компактні множини $K_0, K_1, \ldots, K_n \subset E$. Позначимо через $R(y)$ множину значень функції $y \in C^0$, а через $\mathfrak{D}_{K_0,K_1,\ldots,K_n}$ - множину всіх елементів $x \in C^n$, для кожного з яких $R(x) \subset K_0$, $R\left(dx/dt\right) \subset K_1, \ldots, R\left(dx/dt\right) \subset K_n$.

Розглянемо функціонально-диференціальне рівняння

$$Fx = y, \tag{1}$$

де $F : C^n \to C^0$ - майже періодичний оператор і $y \in B^0$.

Нехай елемент $x^* \in \mathfrak{D}_{K_0,K_1,\ldots,K_n}$ є розв'язком рівняння (1) і $\mathrm{d}iamR\left(x^*\right) \neq 0$. Позначимо через $r(x^*, K_0, K_1, \ldots, K_n)$ число $\max\limits_{l\in\{0,1,\ldots,n\}} \sup\left\{\|x_l - y_l\|_E : x_l \in R\left(d^l x^*/dt^l\right), y_l \in K_l\right\}$, де $d^0 x^*/dt^0 = x^*$. Зафіксуємо довільне число $\varepsilon \in (0, r(x^*, K_0, K_1, \ldots, K_n))$.

Розглянемо функціонал

$$\delta(x^*, K_0, K_1, \ldots, K_n, \varepsilon) = \inf_{z\in\Omega(x^*, K_0, K_1, \ldots, K_n, \varepsilon)} \|Fz - y\|_{C^0},$$

де $\Omega(x^*, K_0, K_1, \ldots, K_n, \varepsilon)$ - множина всіх елементів $z \in \mathfrak{D}_{K_0,K_1,\ldots,K_n}$, для кожного з яких $\|z - x^*\|_{C^n} \geq \varepsilon$.

Теорема. *Якщо* $\delta(x^*, K_0, K_1, \ldots, K_n, \varepsilon) > 0$ *для кожного* $\varepsilon \in (0, r(x^*, K_0, K_1, \ldots, K_n))$, *то* $x^* \in B^n$.

Аналогічні умови майже періодичності розв'язків нелінійних диференціальних, різницевих та диференціально-різницевих рівнянь отримано автором в [1]-[6].

1. Слюсарчук В.Ю. Умови майже періодичності обмежених розв'язків не розв'язаних відносно похідної нелінійних диференціальних рівнянь // Укр. мат. журн. - 2014. - 66, № 3. - С. 384-393.

2. Slyusarchuk V.Yu. Almost periodic solutions of difference equations with discrete argument on metric space // Miskolc Mathematical Notes. - 2014. - Vol. 15, Issue 1. - P. 211-215.

3. Слюсарчук В.Е. Исследование нелинейных почти периодических дифференциальных уравнений, не использующее H -классы этих уравнений // Мат. сб. - 2014. - 205, № 6. - С. 139-160.

4. Слюсарчук В.Е. Условия почти периодичности ограниченных решений нелинейных дифференциально-разностных уравнений // Изв. РАН. Сер. матем. - 2014. - 78, № 6. - С. 179-192.

5. Слюсарчук В.Е. Условия существования почти периодичности решений нелинейных разностных уравнений в банаховом пространстве // Мат. заметки. - 2015. - 97, № 2. - С. 277-285.

6. Слюсарчук В.Ю. Майже періодичні та періодичні розв'язки різницевих рівнянь у метричному просторі // Нелінійні коливання. - 2015. - 18, № 1. - С. 112-119.

Слюсарчук Людмила Мечиславівна, кандидат фіз.-мат. наук, доцент,
Національний університет водного господарства та природокористування, Рівне, Україна,
e-mail: V.Yu.Slyusarchuk@nuwm.edu.ua

АСИМПТОТИЧНАПЕРІОДИЧНІСТЬІСТІЙКІСТЬРОЗВ'ЯЗКІВНЕЛІНІЙНИХДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-РІЗНИЦЕВИХРІВНЯНЬ

СлюсарчукЛ.М.

Нехай $F:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ - C^0 -відображення, $\varphi:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ - C^1 -відображенняі $n \in \mathbb{N}$.

Розглянемодиференціально-різницевотарізницеверівняння

$$\frac{d(x(t+1)-\varphi(x(t)))}{dt} = F(x(t)-\varphi(x(t-1)))), t\geqslant 0, \quad (1)$$

$$y(t+1) = \varphi(y(t)), t\geqslant 0. \quad (2)$$

Будемо вважати, що $F(0) = 0$ і нульовий розв'язок диференціально-різницевого рівняння

$$\frac{dz(t)}{dt} = F(z(t-1)), t\geqslant 0,$$

є асимптотично стійким. У цьому випадку дослідження властивостей розв'язків диференціально-різницевого рівняння (1) зводиться до дослідження властивостей розв'язків різницевого рівняння

$$u(t+1)-\varphi(u(t)) = \varepsilon(t),\ t\geqslant 0, \quad (3)$$

для правої частини якого виконується співвідношення

$$\lim_{t\to+\infty} \| \varepsilon(t) \|_{\mathbb{R}^n} = 0. \quad (4)$$

Завдяки (4) при певних обмеженнях на відображення φ властивості розв'язків рівнянь (2) і (3) є близькими.

Встановлюється зв'язок між розв'язками рівнянь (1) і (2) та з'ясовуються умови асимптотичної періодичності та стійкості розв'язків рівняння (1).

При дослідженні диференціально-різницевого рівняння (1) використовуються результати робіт [1] і [2].

1. Слюсарчук Л.М. Асимптотическое поведение ограниченных решений систем дифференциально-разностных уравнений // Приближенные и качественные методы исследования дифференциальных и дифференциально-функциональных уравнений. - Киев: Ин-т математики АН УССР, 1983. - С. 88-97.

2. Романенко Е.Ю. Разностные уравнения с непрерывным аргументом // Труды Института математики НАН Украины. Т.100. - Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2014. – 347 с.

Сиренко Андрей Сергеевич, аспирант, факультета кибернетики,
Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, Киев, Украина,
e-mail: sandrew@online.ua

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ СЛАБО НЕЛИНЕЙНЫХ РАЗНОСТНЫХ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Сиренко А.С.

Доклад представляет собой исследование разностных систем с запаздыванием, описывающих динамику нейронных сетей. Рассматриваются проблемы устойчивости стационарного положения равновесия нелинейной разностной системы с запаздываниями. При получении условий устойчивости используется второй метод Ляпунова с квадратичной функцией. Рассматривается система «со слабой нелинейностью». Под «слабой нелинейностью» подразумевается, что нелинейные функции удовлетворяют условию Липшица с «малыми» постоянными. Для исследования устойчивости решений систем с запаздыванием используется метод функций Ляпунова с дополнительным условием Разумихина.

Рассматривается система с запаздыванием

$$x_i(k+1) = a_{ii}x_i(k) + \sum_{j=1}^{n} F_{ij}\left(x_j\left(k-m_{ij}\right)\right),\ i=\overline{1,n}, \tag{1}$$

m_{ij} натуральные числа, $i,j=1,n$, а функции $f_{ij}(y),\ i,j=\overline{1,n}$ удовлетворяют условию Липшица. Производится замена $y_1(k)=x_1(k)+y_1^0,\ y_2(k)=x_2(k)+y_2^0,\ldots,\ y_n(k)=x_n(k)+y_n^0$. И система (1) сведется к системе

$$x_i(k+1) = a_{ii}x_i(k) + \sum_{j=1}^{n} F_{ij}\left(x_j\left(k-m_{ij}\right)\right),$$
$$F_{ij}\left(x_j\left(k-m_{ij}\right)\right) = f_{ij}\left(x_j\left(k-m_{ij}\right)+y_j^0\right) - f_{ij}\left(y_j^0\right). \tag{2}$$

Таким образом, исследование устойчивости положения равновесия $M_0\left(y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0\right)$ системы с запаздыванием (1) сводится к исследованию устойчивости нулевого положения равновесия системы (2).

Теорема. Пусть система уравнений (1) имеет единственное решение $M_0\left(y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0\right)$ и существуют постоянные $h_{ii}>0$, $i=\overline{1,n}$, при которых выполняются условия

$$h_{11}\left(1-a_{11}^2\right) - h_{11}K_{11} - h_{22}K_{12} > 0,\ h_{22}\left(1-a_{22}^2\right) - h_{11}K_{21} - h_{22}K_{22} > 0, \tag{3}$$

где

$$K_{11} = |a_{11}|\left(2L_{11} + L_{12}\left(1+\frac{h_{11}}{h_{22}}\right)\right) + L_{11}^2 + L_{11}L_{12}\left(1+\frac{h_{11}}{h_{22}}\right) + L_{12}^2\frac{h_{11}}{h_{22}},$$

L_{ij} - постоянные Липшица функций $F_{ij}(x),\ i,j=\overline{1,n}$. Тогда положение равновесия $M_0\left(y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0\right)$ является асимптотически устойчивым.

Тарасенко Оксана Володимирівна, кандидат фіз.-мат. наук,
НДУ імені Миколи Гоголя, Ніжин, Чернігівська обл., Україна,
e-mail: oxana.tarasenko@gmail.com;

ПРО АСИМПТОТИКУ РОЗВ'ЯЗКУ ОДНІЄЇ ЗАДАЧІ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ З ВИРОДЖЕННЯМ

Тарасенко О.В.

Розглядається сингулярно збурений оптимальний процес керування

$$\varepsilon^h B(t,\varepsilon)\frac{dx}{dt} = A(t,\varepsilon)x + C(t,\varepsilon)u, \tag{1}$$

$$J = \frac{1}{2\varepsilon^h}\int_0^T \big(D(t,\varepsilon)u,u\big)\,dt \to \min_u, \tag{2}$$

який переводить систему із стану

$$x(0,\varepsilon) = x_1(\varepsilon) \tag{3}$$

в стан

$$x(T,\varepsilon) = x_2(\varepsilon) \tag{4}$$

за фіксований проміжок часу T, де $A(t,\varepsilon)$, $B(t,\varepsilon)$ - дійсні квадратні матриці n-го порядку, $C(t,\varepsilon)$, $D(t,\varepsilon)$ - $(n\times m)$ та $(m\times m)$-матриці відповідно, $x(t,\varepsilon)$ - n-вимірний вектор стану, $u(t,\varepsilon)$ - m-вимірний вектор керування, $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$ - малий параметр: $\varepsilon_0 \ll 1$; $h\in N$, $t\in[0;T]$.

Передбачається, що матриці $A(t,\varepsilon)$, $B(t,\varepsilon)$, $C(t,\varepsilon)$ та $D(t,\varepsilon)$ допускають рівномірні асимптотичні розвинення на $[0;T]$ за степенями параметра ε, $\det D(t,0)\neq 0$, $\forall t\in[0;T]$, і в'язка матриць $A(t,0)-\lambda B(t,0)$ має $n-1$ простих скінченних елементарних дільників $\lambda-\lambda_i(t)$, $i=\overline{1,n-1}$, і один - нескінченний.

Крім того, розглядається випадок, коли мають місце співвідношення: $\big(B_1(t)\tilde\varphi(t),\tilde\psi(t)\big)\equiv 0$, $\big((B_1(t)G(t)B_1(t)-B_2(t))\tilde\varphi(t),\tilde\psi(t)\big)<0$, $\forall t\in[0;T]$, де $\tilde\varphi(t)$ - власний вектор матриці $B_0(t)$, що відповідає її нульовому власному значенню, $\tilde\psi(t)$ - відповідний власний вектор спряженої матриці $B_0^*(t)$, $G(t)$ - напівобернена матриця до матриці $B_0(t)$.

У роботі встановлено, що за виконання цих умов до задачі (1)-(4) можна застосувати принцип максимуму Понтрягіна, в результаті чого вона зводиться до нетерової крайової задачі

$$\varepsilon^h\tilde B(t,\varepsilon)\dot y = \tilde A(t,\varepsilon)y,\ My(0,\varepsilon)+Ny(T,\varepsilon)=y_0(\varepsilon).$$

Знайдено ряд умов, за виконання яких ця задача має єдиний розв'язок, і побудовано його асимптотику при $\varepsilon\to 0$, використовуючи розроблену теорію асимптотичного інтегрування лінійних сингулярно збурених систем диференціальних рівнянь з виродженою матрицею при похідних [1]. Отримано асимптотичний вираз для оптимального керування $u(t,\varepsilon)$, під дією якого система може бути переведена із стану $x_1(\varepsilon)$ в стан $x_2(\varepsilon)$ та побудована асимптотика вектор-функції $x(t,\varepsilon)$, що задає відповідну траєкторію.

1. Самойленко А.М. Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями / А.М. Самойленко, М.І. Шкіль, В.П. Яковець. - К.: Вища школа, 2000. - 294 с.

Тингаев Александр Аркадьевич, кандидат физ.-мат. наук, доцент,
Одесский институт финансов УГУФМТ, Одесса, Украина,
e-mail: al.tingaev@gmail.com

СУЩЕСТВОВАНИЕ ОГРАНИЧЕННЫХ РЕШЕНИЙ КВАЗИЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ОПЕРАТОРНОГО УРАВНЕНИЯ

Тингаев А.А.

Исследуется вопрос о существовании ограниченных на бесконечном промежутке решений дифференциально-операторного уравнения

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = F(t, V(x, \dot{x})), \qquad (1)$$

где $V(x,\dot{x})$ – оператор, определенный на функциях $x(t) \in \mathrm{C}^1(\mathrm{R})$. С обзором результатов исследований ограниченности решений уравнения (1), не содержащего оператор $V(x,\dot{x})$, можно познакомиться в [1].

В данной работе получены достаточные условия существования ограниченных решений $x(t)$ дифференциально-операторного уравнения (1), которое удовлетворяет начальным условиям $x(t_0) = x_0, \quad x'(t_0) = x_1$.

Общая схема метода ([2]) исследования представляет собой следующее. Вводится метрическое пространство G дважды непрерывно дифференцируемых, ограниченных на бесконечном промежутке $[t_0;+\infty)$ функций $x(t)$. В пространстве G вводится замкнутое множество D, на котором задается сжатое отображение $A: D \to D$ следующим образом – каждой функции $\varphi(t) \in D$ ставится в соответствие единственное решение $x(t) \in D$ дифференциального уравнения

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = F(t, V(\varphi(t), \dot{\varphi}(t))),$$

удовлетворяющее заданным начальным условиям $x(t_0) = x_0, \quad x'(t_0) = x_1$. Таким образом, неподвижная точка построенного отображения A оказывается ограниченным на промежутке $[t_0;+\infty)$ решением дифференциально-операторного уравнения (1). Применение теоремы Принцип сжатых отображений ([3]) позволяет получить искомый результат.

Следует заметить, что хотя оператор $V(x,\dot{x})$ может иметь разнообразную природу, чаще всего в практических задачах $V(x,\dot{x})$ представляет собой интеграл с переменным либо постоянным верхним пределом. Кроме того, в пределах интегрирования может присутствовать неизвестная функция $x(t)$.

1. Рейссиг Р. Качественная теория нелинейных дифференциальных уравнений / Р. Рейссиг, Г. Сансоне, Р. Конти – Москва: Наука, 1974. – 318 с.

2. Грабовская Р.Г., Тингаев А.А. О существовании и асимптотических свойствах решений сингулярных дифференциально-операторных систем// Тези міжнародної конференції, присвяченої пам'яті академіка М.П. Кравчука.-Київ, Інститут математики АН України,1992.-с.52.

3. Канторович Л.В. Функциональный анализ / Канторович Л.В., Акилов Г.П.–3-е издание.– Москва: Наука, 1984.–752 с.

Ферук Віктор Анатолійович, кандидат фіз.-мат. наук,
Інститут математики НАН України, Київ, Україна
e-mail: feruk.viktor@gmail.com;
Козлова Надія Олександрівна, аспірант механіко-математичного факультету,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
e-mail: nkozlovaa@gmail.com;

НЕТЕРОВІ КРАЙОВІ ЗАДАЧІ ДЛЯ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Ферук В.А., Козлова Н.О.

Розглядається лінійна крайова задача для інтегрального рівняння:

$$x(t) = f(t) + \int_a^b K(t,s)x(s)ds, Sx(\cdot) = \alpha. \qquad (1)$$

$K(t,s)$ - ядро, сумовне з квадратом в області $[a,b]\times[a,b]$, $f \in L_2[a,b]$, $x \in L_2[a,b]$, S - обмежений лінійний векторний функціонал, визначений в $L_2[a,b]$, $S = col\left(S_1,\ S_2,\ \ldots,\ S_p\right): L_2[a,b] \to R^p$, $S_i : L_2[a,b] \to R$, $\alpha = col\left(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_p\right) \in R^p$.

Особливість цієї задачі полягає в тому, що лінійне неоднорідне інтегральне рівняння (1) не завжди розв'язне. Доведено, що лінійний однорідний оператор цієї задачі, який представляється у вигляді $Lx := col(x + \int_a^b K(t,s)x(s)ds, Sx)$ є нетеровим в $L_2[a,b]$.

Розглянуто питання про розв'язність та структуру множини розв'язків системи. Знайдено необхідні та достатні умови розв'язності інтегрального рівняння та загальний вигляд його розв'язку. Використовуючи ці результати, досліджено питання про розв'язність крайової задачі (1) та знайдено необхідні та достатні умови розв'язності крайової задачі (1).

У випадку, коли $K(t,s)$ - вироджене ядро, отримані результати узгоджуються з раніш відомими результатами [1-2].

У випадку збуреної крайової задачі для задачі (1) отримано умови біфуркації розв'язків таких задач.

1. Самойленко А.М., Бойчук О.А., Кривошея С.А. Крайові задачі для систем лінійних інтегро - диференціальних рівнянь з виродженим ядром//Укр.мат.журн.-1996.-Т.48, №11.-С.1576-1579.

2. A. Boichuk, A. Samoilenko. Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems.-VSP, Utrecht-Boston, 2004.

Ходневич Ярослав Васильович, молодший науковий співробітник,
Інститут телекомунікацій і глобального інформаційного простору НАН України, Київ, Україна,
e-mail:jvhodnevich@ukr.net

ВЕРИФІКАЦІЯ ОБЧИСЛЮВАЛЬНОГО АЛГОРИТМУДЛЯ ВИЗНАЧЕННЯ КІНЕМАТИЧНИХ ХАРАКТЕРИСТИК ВОДНОГО ПОТОКУ В ЛОКАЛЬНІЙ ТРИВИМІРНІЙ ОБЛАСТІ У ПРИРОДНОМУ РУСЛІ

Ходневич Я.В.

Розглядається верифікація чисельної моделі для обчислення кінематики руслового потоку в локальній тривимірній області, яка має форму паралелепіпеда та знаходиться біля підніжжя гряди наносів, з протилежного боку до набігаючого потоку. Математична модель кінематичних характеристик руслового потоку в місці обтікання гряди наносів, що відхилена вниз за течією, ґрунтується на системі рівнянь Рейнольдса для квазіламінарного потоку та рівнянь Рейнольдса у дивергентній формі, які замикаються k-ε моделлю турбулентності [1].

Результати чисельного моделювання швидкостей у тривимірному потоці порівнюються з відомими аналітичними розв'язками та даними експериментальних досліджень про кінематичну структуру потоку. Зокрема, здійснюється порівняння з аналітичним розв'язком, який отримується за допомогою логарифмічної залежності Гончарова [2]. При цьому розглядається задача обчислення поля швидкостей в прямолінійному потоці прямокутного перерізу. Така задача має просту геометрію і разом з тим дозволяє використати всю складність та особливості розв'язання рівнянь Рейнольдса.Також результати комп'ютерного моделювання порівнюються з аналітичним розв'язком спрощеної системи рівнянь Нав'є-Стокса, який отримується за допомогою класичного методу розділення змінних [3]. В цьому випадку розглядається задача обчислення поля швидкості в прямолінійному потоці прямокутного перерізу з непроникними бічними, верхньою та нижньою границями. Також здійснюється порівняння результатів чисельного моделювання з даними експериментальних гідравлічних досліджень. Використовуються результати експериментальних вимірів швидкості поступального руху водного потоку за донним уступом, що відхилений вниз за течією у дзеркальному лотку [4]. В цьому випадку розглядається задача обчислення поля швидкостей у локальній тривимірній області для трьох дослідів із незмінними значеннями характеристик потоку, але в умовах розташування донного уступу в лотку під кутами 30, 45, 60 градусів. Основні параметри для цих дослідів наводяться в [4].

Результатами таких тестових задач показують, що обчислені значення швидкостей водного потоку достатньо добре наближаються до даних аналітичних розв'язків та експериментальних вимірів швидкості водного потоку за донною перешкодою.

1. Ходневич Я. В. Математичне моделювання кінематичних характеристик руслового потоку в місці обтікання гряди наносів / Я.В. Ходневич // XVI InternationalConferenceDynamicalSystemModelingandStabilityInvestigations. AbstractsofConferenceReports. Kyiv, Ukraine, May 29-31, 2013. – Київ, 2013. – С. 238.

2. Барышников Н.Б. Динамика русловых потоков и русловые процессы / Н.Б. Барышников, И.В. Попов. – Л.: Гидрометеоиздат. 1988. – 454 с.

3. Черний Д.И. Модели вязких слоистых течений / Д.И. Черний // VI Міжнародна конференція ім. акад. І.І. Ляшка „Обчислювальна та прикладна математика". Матеріали конференції, Київ, 5-6 вересня 2013 р. – Київ, 2013. – С. 211.

4. Щодро А.Е. Кинематика потока и водообмен за косорасположенными донными уступами гидротехнических сооружений / А.Е. Щодро // Гидравлика и гидротехника. Респ. межвед. научно-техн. сборник. – Вып. 26. – К.: Техника, 1978. – С. 59 - 64.

Хорошун Анатолий Сергеевич, кандидат физ.-мат. наук, научный сотрудник,
Институт механики им. С.П. Тимошенко, Киев, Украина,
e-mail: ohotnik133@rambler.ru;

О СТАБИЛИЗАЦИИ ВЕРХНЕГО ПОЛОЖЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ МАЯТНИКА ВРАЩЕНИЕМ ИНЕРЦИАЛЬНОГО МАХОВИКА

Хорошун А.С.

Рассматривается однозвенный маятник, который может совершать вращение в вертикальной плоскости. Ось его вращения расположена горизонтально и закреплена на неподвижном основании. Свободный конец маятника снабжен симметричным относительно центра маховиком, с осью вращения, вокруг которой маховик может поворачиваться в ту или иную сторону, параллельной оси вращения маятника. Маховик приводится в движением электродвигателем постоянного тока, статор которого жестко скреплен с маятником, а ось ротора жестко соединена с осью маховика. Управление маятником происходит с помощью вращения маховика, которое задается электродвигателем. Задача управления состоит в стабилизации маятника в его верхнем положении равновесия в то время как маховик прекратит свое вращение.

Уравнения движения системы «маятник-маховик» получены аналогично работам [1,2]. Считаем, что некоторые или, возможно, все параметры модели заданы неточно и известно, лишь, об их принадлежности некоторому замкнутому множеству. Для построения управления используем технику предложенную в [3], т.н. Dynamic Surface Control. Одной из особенностей данного метода является применение фильтров (low-pass filters), которые позволяют избежать нарастания сложности элементов системы дифференциальных уравнений (explosion of terms), в том числе и закона управления, хотя и увеличивают ее размерность. Кроме того, поскольку временные константы фильтров могут быть выбраны фиксированными но как угодно малыми положительными числами, то исходная система дифференциальных уравнений естественным образом может быть представлена в виде сингулярно возмущенной.

Получен закон управления вращением инерциального маховика, который обеспечивает глобальную асимптотическую устойчивость верхнего положения равновесия маятника. Доказательство этого факта проводится с помощью метода функций Ляпунова. Отметим относительную простоту полученного закона управления, что имеет важность для его практического применения. Также в работе указаны оценки, которые позволяют выбрать параметры управления и временные константы фильтров так, чтобы полученное управление реализовывало поставленную задачу. Доказана робастность такого управления и предложен способ оценки области робастности в пространстве параметров механической системы. Полученные результаты проиллюстрированы на примере реальной модели, которая сконструирована в лаборатории мехатроники Института механики МГУ.

1. Формальский А.М. Управление движением неустойчивых объектов. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2013. - 235 с.

2. Spong M.W. Energy based control of a class of underactuated mechanical systems // Proc. of IFAC World Congress. - 1996. - vol.F. - pp. 431-435.

3. Swaroop D., Hedrick J.K., Yip P.P., Gerdes J.C. Dynamic surface control for a class of nonlinear systems // IEEE Trans. of Automatic Control. - 2000. - vol. 45, №11. - pp. 1893-1899.

Черепенников Валерий Борисович, доктор физ.-мат. наук, старший научный сотрудник,
Институт систем энергетики имени Л.А.Мелентьева, Иркутск, Россия,
e-mail: vbcher@mail.ru

МЕТОД ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ КВАЗИРЕШЕНИЙ В ТЕОРИИ ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Черепенников В.Б.

Доклад посвящен результатам исследования скалярных линейных функционально-дифференциальных уравнений нейтрального и запаздывающего типов с полиномиальными коэффициентами.

$$\dot{x}(t) + p(t)\dot{x}(t-1) = a(t)x(t) + b(t)x(t-1) + f(t),$$
$$\dot{x}(t) = a(t)x(t-1) + b(t)x(t/q) + f(t),\ q > 1.$$

Основное внимание уделяется начальной задаче с начальной точкой, когда начальное условие задается в начальной точке, и ищется классическое решение, подстановка которого в исходное уравнение обращает его в тождество. В качестве метода исследования применяется метод полиномиальных квазирешений [1], который основан на представлении неизвестной функции $x(t)$ в виде полинома степени N. При подстановке этой функции в исходное уравнение возникает невязка $\Delta(t) = O(t^N)$, для которой получено точное аналитическое представление. Тогда под полиномиальным квазирешением понимается точное решение в виде полинома степени N возмущенной на невязку исходной начальной задачи. Доказаны теоремы существования у рассматриваемых уравнений полиномиальных квазирешений и точных полиномиальных решений [2]. Приведенырезультатычисленногоэксперимента.

1. Polynomial quasisolutions of linear differential difference equations / V.B. Cherepennikov, Ermolaeva P.G. // Opuscula Mathematica, V. - 2006. - P. 47 - 57.

2. Черепенников В.Б. Ободном методе исследования линейных функционально-дифференциальных уравнений / В.Б. Черепенников, Е.В. Ветрова // Украинский математический журнал, Т.65, №4. - 2013. -С. 594-600.

Чуйко Сергей Михайлович, Сысоев Денис Витальевич
Донбасский государственный педагогический университет,
email: chujko-slav@inbox.ru

НЕЛИНЕЙНАЯ МАТРИЧНАЯ КРАЕВАЯ В СЛУЧАЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО РЕЗОНАНСА

Чуйко С.М., Сысоев Д.В.

Нами получены условия разрешимости и схема построения решений [1]

$$Z(t,\varepsilon): Z(\cdot,\varepsilon)\in\mathbb{C}^1[a;b],\quad Z(t,\cdot)\in\mathbb{C}[0;\varepsilon_0],\quad Z(t,\varepsilon)\in\mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$$

матричной нетеровой $(\alpha\neq\beta\neq\delta\neq\gamma)$ краевой задачи

$$Z'(t,\varepsilon)=AZ(t,\varepsilon)+Z(t,\varepsilon)B+F(t,\varepsilon)+\varepsilon\,\Phi(Z(t,\varepsilon),\mu(\varepsilon),t,\varepsilon),\quad \mathcal{L}Z(\cdot,\varepsilon)=\mathcal{A}. \tag{1}$$

Решение краевой задачи (1) ищем в малой окрестности решения порождающей задачи

$$Z_{0'}(t,\varepsilon)=AZ_0(t,\varepsilon)+Z_0(t,\varepsilon)B+F(t,\varepsilon),\quad \mathcal{L}Z_0(\cdot,\varepsilon)=\mathcal{A},\quad \mathcal{A}\in\mathbb{R}^{\delta\times\gamma}. \tag{2}$$

Здесь $A\in\mathbb{R}^{\alpha\times\alpha}$ и $B\in\mathbb{R}^{\beta\times\beta}$- постоянные матрицы. Нелинейный матричный оператор $\Phi(Z(t,\varepsilon),\mu(\varepsilon),t,\varepsilon):\mathbb{R}^{\alpha\times\beta}\to\mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$ предполагаем дифференцируемым в смысле Фреше по первому аргументу в малой окрестности решения порождающей задачи и непрерывно дифференцируемым по μ в малой окрестности решения порождающей задачи (2) и начального значения $\mu_0(\varepsilon)$ собственной функции $\mu(\varepsilon)$. Нелинейность $\Phi(z,\mu(\varepsilon),t,\varepsilon)$ и неоднородность порождающей задачи $F(t,\varepsilon)$ считаем непрерывными по t на отрезке $[a,b]$ и по малому параметру ε на отрезке $[0,\varepsilon_0]$. Кроме того, $\mathcal{L}Z(\cdot,\varepsilon)$- линейный ограниченный матричный функционал: $\mathcal{L}Z(\cdot,\varepsilon):\mathbb{C}^1[a;b]\to\mathbb{R}^{\delta\times\gamma}$.

Предложена классификация нетеровых краевых задач в случае параметрического резонанса, которая существенно отличается от аналогичной классификация периодических задач в случае параметрического резонанса [2] и соответствует общей классификации периодических и нетеровых краевых задач [1]. Предложенная схема построения решений краевой задачи (1) предполагает использование обобщенного оператора Грина линейной нетеровой краевой задачи для матричного дифференциального уравнения [3].

1.*Boichuk A.A., Krivosheya S.A.*A Critical Periodic Boundary Value Problem for a Matrix Riccati Equations // Differential Equations. - 2001. - 37, № 4. - P. 464 - 471.

2. *Якубович В.А., Старжинский В.М.* Параметрический резонанс в линейных системах. // - М.: Наука, 1987. - С. 328.

3. *Чуйко С.М.* Оператор Грина линейной нетеровой краевой задачи для матричного дифференциального уравнения // Динамические системы. - 2014. - 4 (32), № 1 - 2. - С. 101 - 107.

Чуйко Сергей Михайлович, доктор физ.-мат. наук, профессор,
Донбасский государственный педагогический университет, Славянск, Украина,
e-mail: chujko-slav@inbox.ru;
Чуйко Елена Викторовна, кандидат физ.-мат. наук, доцент,
Донбасский государственный педагогический университет, Славянск, Украина,
e-mail: chujko-slav@inbox.ru;

О ПСЕВДОРЕШЕНИЯХ МАТРИЧНЫХ НЕТЕРОВЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

Чуйко С.М., Чуйко Е.В.

Исследована задача о нахождении решения $Z(t)\in C^1[a;b]$ краевой задачи

$$Z'(t)=AZ(t)+Z(t)B+F(t),\ \ \mathcal{L}Z(\cdot)=\mathcal{A},\ \ \mathcal{A}\in\mathbb{R}^{\lambda\times\mu},\ \ F(t)\in\mathbb{C}[a,b]. \qquad (1)$$

Здесь $A\in\mathbb{R}^{m\times m}$ и $B\in\mathbb{R}^{n\times n}$ - постоянные матрицы; $\mathcal{L}Z(\cdot)$ - линейный ограниченный матричный функционал: $\mathcal{L}Z(\cdot):C^1[a;b]\to\mathbb{R}^{\lambda\times n}$, обобщающий условие [1]. Определим оператор $\mathcal{M}[\mathcal{B}]:\mathbb{R}^{\ell\times n}\to\mathbb{R}^{\ell\cdot n}$, который ставит в соответствие матрице $\mathcal{B}\in\mathbb{R}^{\ell\times n}$ вектор-столбец $\mathcal{M}[\mathcal{B}]\in\mathbb{R}^{\ell\cdot n}$, составленный из n столбцов матрицы $\mathcal{B}$, а также обратный оператор $\mathcal{M}^{-1}\{\mathcal{M}[\mathcal{B}]\}:\mathbb{R}^{\ell\cdot n}\to\mathbb{R}^{\ell\times n}$ [2]. Обозначим $\Xi^{(j)}\in\mathbb{R}^{m\times n}$ - базис пространства $\mathbb{R}^{m\times n}$ и $\Omega^{(j)}\in\mathbb{R}^{m\cdot n}$, $j=1,2,\dots m\cdot n$ - базис пространства $\mathbb{R}^{m\cdot n}$. Пусть $\varphi_1(t),\varphi_2(t),\dots,\varphi_k(t),\dots$ – система линейно независимых непрерывно дифференцируемых вектор-функций. Обозначим

$\mathcal{P}_\varphi:=P_{[\Gamma(\varphi(\cdot))+\Gamma(\mathcal{L}\varphi(\cdot))]^*}:\mathbb{R}^k\to N[\Gamma(\varphi(\cdot))+\Gamma(\mathcal{L}\varphi(\cdot))]^*-(k\times k)-$ матрицу-ортопроектор [1 - 3].

Теорема. *Для фиксированной матрицы* $\varphi(t):=[\varphi_1(t)\ \ \varphi_2(t)\ \dots\ \varphi_k(t)]$ *при условии*

$$\mathcal{P}_\varphi\left\{\int_a^b\Phi^*(t)\mathcal{M}[F(t)]dt+\Psi^*\mathcal{M}[\mathcal{A}]\right\}=0,\ \Phi(t):=[\,\Phi_1(t)\ \ \Phi_2(t)\ \dots\ \Phi_k(t)\,]$$

наилучшее по методу наименьших квадратов

$$\|\mathcal{M}[Z'(t)-AZ(t)-Z(t)B-F(t)]\|^2_{L^2[a,b]}+\|M[\mathcal{L}Z(\cdot)-\mathcal{A}]\|^2_{\mathbb{R}^{\lambda\cdot\mu}}\to\min$$

псевдорешение матричной нетеровой $(m\neq n\neq\lambda\neq\mu)$ задачи (1) имеет вид

$$Z(t,\varphi)=\mathcal{M}^{-1}[\varphi(t)c],\ \ \Phi_j(t):=\mathcal{M}\{\varphi'(t)\cdot\Xi^{(j)}-A\varphi(t)\cdot\Xi^{(j)}-\mathcal{M}^{-1}[\varphi(t)\cdot\Xi^{(j)}]B\};$$

здесь

$$c=\sum_{j=1}^{m\cdot n}\Omega^{(j)}\gamma_j,\ \ \gamma=[\Gamma(\varphi(\cdot))+\Gamma(\mathcal{L}\varphi(\cdot))]^+\left\{\int_a^b\Phi^*(t)\mathcal{M}[F(t)]dt+\Psi^*\mathcal{M}[\mathcal{A}]\right\},$$

$$\Gamma(\varphi(\cdot)):=\int_a^b\Phi^*(t)\Phi(t)dt,\ \ \Gamma(\mathcal{L}\varphi(\cdot)):=\Psi^*\Psi,\ \ \Psi_j:=\mathcal{M}\{\mathcal{L}\mathcal{M}^{-1}[\varphi(\cdot)\Omega^{(j)}]\}.$$

Утверждение теоремы является обобщением соответствующих утверждений для периодической краевой задачи [1] на случай матричной нетеровой краевой задачи (1).

1. *Boichuk A.A., Krivosheya S.A.*A Critical Periodic Boundary Value Problem for a Matrix Riccati Equations // Differential Equations. - 2001. - 37, № 4. - P. 464 - 471.

2. *Чуйко С.М.* О решении матричных уравнений Ляпунова // Вісник Харківського національного університету ім. В.Н. Каразіна. Серія: Математика і механіка. - № 1120. - 2014. - С. 85 - 94.

3. *Чуйко С.М.* Оператор Грина линейной нетеровой краевой задачи для матричного дифференциального уравнения // Динамические системы. - 2014. - 4 (32), № 1 - 2. - С. 101 - 107.

ЧуйкоСергейМихайлович, докторфиз.-мат. наук, профессор,
Донбасский государственный педагогический университет, Славянск, Украина,
e-mail: chujko-slav@inbox.ru;
Несмелова (Старкова) Ольга Владимировна, кандидат физ.-мат. наук, доцент,
Донбасский государственный педагогический университет, Славянск, Украина,
e-mail: star-o@ukr.net;

ПЕРИОДИЧЕСКАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛЬЕНАРА В СЛУЧАЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО РЕЗОНАНСА

Чуйко С.М., Несмелова (Старкова) О.В.

Исследована задача о нахождении решений $y(\cdot,\varepsilon)\in C^2[0,2\pi]$, $y(t,\cdot)\in C[0,\varepsilon_0]$ периодической краевой задачи [1] для уравнения Льенара

$$y''+y=f(t,\varepsilon)+\varepsilon Y(y,y',\mu,t,\varepsilon), \tag{1}$$

которые при $\varepsilon=0$ обращаются в решение $y_0(t,\varepsilon)\in C^2[0,2\pi]$, $y_0(t,\cdot)\in C[0,\varepsilon_0]$ порождающей периодической краевой задачи для уравнения

$$y_0''(t,\varepsilon)+y_0(t,\varepsilon)=f(t,\varepsilon).$$

Здесь $Y(y,y',\mu,t,\varepsilon)$ – нелинейная функция, непрерывно дифференцируемая по первым трем аргументам в малой окрестности решения порождающей задачи и собственной функции $\mu(\varepsilon)$. Кроме того, считаем нелинейную вектор-функцию $Y(y,y',\mu,t,\varepsilon)$ и неоднородность порождающей задачи $f(t,\varepsilon)$ непрерывными по t на отрезке $[0,2\pi]$ и по малому параметру ε на отрезке $[0,\varepsilon_0]$. Предположим, что выполнено условие [1] разрешимости порождающей задачи

$$\int_0^{2\pi}\begin{bmatrix}\cos s\\ -\sin s\end{bmatrix} f(s,\varepsilon)\,ds=0. \tag{2}$$

Нами получены необходимые и достаточные условия существования решения, а также собственной функции $\mu(\varepsilon)$ периодической задачи для уравнения Льенара (1). Найденное для периодической задачи для уравнения Льенара в случае параметрического резонанса уравнение для порождающих амплитуд существенно отличается от традиционного уравнения для порождающих констант [1] зависимостью от малого параметра, как самого уравнения, так и его корней.

1. *Boichuk A.A., Samoilenko A.M.* A Critical Periodic Boundary Value Problem for a Matrix Riccati Equations // Differential Equations. - 2001. - 37, № 4. - P. 464 - 471.

2. *Чуйко С.М.* Нелинейная нетерова краевая задача в случае параметрического резонанса // Нелінійні коливання. - 2014. - 17, № 1. - С. 137 - 148.

3. *Чуйко С.М., Старкова О.В., Кулиш П.В.* Периодическая краевая задача для уравнения Хилла в случае параметрического резонанса // Комп. исследов. и моделирование. - 2014. - 6, № 1. - С. 27 - 43.

Шамолин Максим Владимирович, доктор физ.-мат. наук, профессор
МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Российская Федерация
e-mail: shamolin@rambler.ru, shamolin@imec.msu.ru

ОБЗОР СЛУЧАЕВ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ В МНОГОМЕРНОЙ ДИНАМИКЕ НЕКОНСЕРВАТИВНЫХ СИСТЕМ

Шамолин М.В.

Результаты предлагаемой работы являются развитием некоторой прикладной задачи из динамики твердого тела, где были получены полные списки трансцендентных первых интегралов, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций [1].

Как известно, понятие интегрируемости, вообще говоря, достаточно расплывчатое. При его построении необходимо учитывать в каком смысле оно понимается, в классе каких функций ищутся первые интегралы и т.д. В данной работе принимается такой подход, который учитывает в качестве класса функций как первых интегралов трансцендентные функции, причем элементарные. Здесь трансцендентность понимается не в смысле теории элементарных функций (например тригонометрических), а в смысле наличия у них существенно особых точек (в силу классификации, принятой в теории функций комплексного переменного, когда функция имеет существенно особые точки) [2].

В [1] уже была показана полная интегрируемость уравнений плоскопараллельного движения тела в сопротивляющейся среде, когда у системы динамических уравнений существует первый интеграл, являющийся трансцендентной (в смысле теории функций комплексного переменного, имеющей существенно особые точки) функцией квазискоростей. Тогда предполагалось, что все взаимодействие среды с телом сосредоточено на той части поверхности тела, которая имеет форму (одномерной) пластины. Позднее [1, 3] плоская задача была обобщена на пространственный (трехмерный) случай, при этом у системы динамических уравнений существует полный набор трансцендентных первых интегралов. Здесь уже предполагалось, что все взаимодействие среды с телом сосредоточено на той части поверхности тела, которая имеет форму плоского (двумерного) диска. Далее, в [3] была исследована динамическая часть уравнений движения различных динамически симметричных четырехмерных твердых тел, где силовое поле сосредоточено на той части поверхности тела, которая имеет форму двумерного (трехмерного) диска, при этом силовое воздействие сосредоточено на двумерной плоскости (одномерной прямой), перпендикулярной данному диску.

В данной работе результаты относятся к случаю, когда все взаимодействие среды с телом сосредоточено на той части поверхности тела, которая имеет форму $(n-1)$-мерного диска, при этом силовое воздействие сосредоточено в направлении, которое перпендикулярно данному диску. Данные результаты систематизируются и подаются в инвариантном виде. При этом вводится дополнительная зависимость момента неконсервативной силы от угловой скорости.

Работа поддержана Российским Фондом Фундаментальных Исследований, проект 12-01-00020.

1. Шамолин М.В. Динамические системы с переменной диссипацией: подходы, методы, приложения // Фундам. и прикл. матем. 2008. Т. 14, 3. С. 3–-237.

2. Трофимов В.В., Шамолин М.В. Геометрические и динамические инварианты интегрируемых гамильтоновых и диссипативных систем // Фундам. и прикл. матем. 2010. Т. 16, 4. С. 3–-229.

3. Шамолин М.В. Многообразие случаев интегрируемости в динамике маломерного и многомерного твердого тела в неконсервативном поле сил // Итоги науки и техники. Сер. "Современая математика и ее приложения. Тематические обзоры". 2013. Т. 125. М.: ВИНИТИ. С. 5-254.

Шатирко Андрій Володимирович, кандидат фіз.-мат. наук, доцент,
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
e-mail: a_shatyrko@univ.kiev.ua , shatyrko.a@gmail.com;

ПРЯМИЙ МЕТОД ЛЯПУНОВА В ПРОБЛЕМІ АБСОЛЮТНОЇ СТІЙКОСТІ НЕЛІНІЙНИХ СИСТЕМ РЕГУЛЮВАННЯ З ВІДХИЛЕННЯМ АРГУМЕНТУ

Шатирко А.В.

Метою роботи є розвиток ідей прямого метода Ляпунова стосовно якісного дослідження складних динамічних систем спеціального вигляду. Побудова загальної концепції використання підходу функцій Ляпунова та функціоналів Ляпунова-Красовського для отримання умов абсолютної, інтервальної абсолютної стійкості та оцінок збіжності розв'язків нелінійних систем регулювання, що описуються в термінах функціонально-диференціальних рівнянь з запізнюванням аргументу, нейтрального типу, різницевих рівнянь, та мають інтервальну невизначеність у заданні лінійної частини.

Об'єктом дослідження є класи функціонально-диференціальних систем з запізнюванням аргументу та нейтрального типу, систем різницевих рівнянь, які мають чітко виділену лінійну частину та «слабку» нелінійність секторного вигляду, а також присутність інтервальної невизначеності у заданні коефіцієнтів лінійної частини.

Предмет дослідження: умови стійкості розв'язків, оцінки затухання розв'язків, оцінки допустимих інтервальних збурень на коефіцієнти системи, обчислення величин критично допустимого відхилення аргументу, стабілізація до стану абсолютної стійкості, оптимізаційні методи побудови функцій Ляпунова та функціоналів Ляпунова-Красовського обраних класів.

В доповіді відображено наступні основні результати.

Розвинуто ідеї прямого методу Ляпунова до дослідження стійкості складних динамічних систем в умовах невизначеності

Вдосконалено підходи скінченно-вимірних функцій Ляпунова та функціоналів Ляпунова-Красовського в застосуванні до якісного аналізу поведінки нелінійних систем регулювання з відхиленням аргументу різної природи й інтервальною невизначеністю

Введено поняття інтервальної абсолютної стійкості нелінійних систем регулювання

Побудовані достатні умови абсолютної та абсолютної інтервальної стійкості неперервних систем прямого й непрямого автоматичного регулювання з запізнюванням аргументу, та нейтрального типу й інтервальною невизначеністю коефіцієнтів лінійної частини. Умови отримано як для довільної, так і для достатньо малої величини відхилення аргументу

Отримані співвідношення на δ-окіл збурень початкових даних, та ε-окіл поведінки розв'язків, що забезпечують їх відповідну стійкість

Використовуючи підхід скінченно-вимірних функцій Ляпунова встановлено величину «критичного» відхилення аргументу, при якому зберігається якість поведінки систем регулювання з запізнюванням та нейтрального типу

Сформульовано та розв'язано аналогічні задачі про якісну поведінку розв'язків дискретних систем прямого регулювання з умовами інтервальної невизначеності на коефіцієнти лінійної частини, що описані в термінах різницевих рівнянь та різницевих рівнянь з аргументом що запізнюється

Поставлено, чітко сформульовано та розв'язано задачі стабілізації розв'язків неперервних систем прямого та непрямого регулювання з запізнюванням аргументу та нейтрального типу до стану абсолютної стійкості

Швець Ольга Федорівна, кандидат фіз.-мат. наук, доцент,
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ, Україна;
Сопронюк Ольга Лукянівна, асистент,
ЧНУ імені Юрія Федьковича, Чернівці, Україна,
e-mail: olia.poshta@gmail.com

ЧИСЛОВИЙ АНАЛІЗ ЧУТЛИВОСТІ ПАРАМЕТРИЧНИХ СИСТЕМ ЗІ ЗМІННОЮ ВИМІРНІСТЮ ФАЗОВОГО ПРОСТОРУ МАТРИЧНИМИ МЕТОДАМИ

Швець О.Ф., Сопронюк О.Л.

В роботі приведені алгоритми для обчислення функцій чутливості динамічних систем звичайних диференціальних рівнянь зі змінною вимірністю фазового простору, залежних від векторного параметра. Для числового знаходження функцій чутливості виписані матричні моделі, які також являються системами звичайних диференціальних рівнянь зі змінною вимірністю фазового простору. Виведена формула Коші для матричного диференціального рівняння зі змінною вимірністю фазового простору. Побудовані алгоритми є досить загальними і можуть бути використані для розв'язування задач аналізу стійкості та чутливості, ідентифікації, оптимізації, обчислення допусків на параметри широкого класу динамічних систем.

Таким чином, в даній роботі приведені алгоритми для числового аналізу чутливості параметричних систем [1,2] зі змінною вимірністю фазового простору [3] з позицій матричних диференціальних рівнянь. Такі задачі виникають у зв'язку з необхідністю забезпечення нормального функціонування об'єкта на реальних режимах, що пов'язано з урахуванням факторів різної природи, які характеризуються параметрами зовнішнього середовища та умовами експлуатації. Деякі з них несуть основну інформацію про властивості системи, враховуються в її моделі завдяки вектору фазового стану. Але завжди реально існує безліч додаткових факторів, що не контролюються, але можуть значно впливати на роботу об'єкта. З іншого боку, у реальних умовах експлуатації завжди виникає розкид значень параметрів від їх розрахункових, що зумовлює зміну вектора фазових координат та критерію якості системи. Якщо розкид змінних стану за величиною буде досить значним, то це може призвести взагалі до непрацездатності об'єкту. Таким чином, працездатність реальної системи визначається характером залежності її властивостей від змінювання параметрів, тобто – чутливістю системи. Природно вимагати, щоб система була малочутливою до зміни параметрів. Тому питання чутливості доцільно розглядати ще на етапі проектування, хоча це буде й ускладнювати розв'язання вихідної задачі. Основна увага в роботі зосереджується на числовому моделюванні рівнянь чутливості для систем зі змінною вимірністю фазового простору. Акцентується увага на тому, що для векторного параметра необхідно розв'язувати матричне диференціальне рівняння зі змінною вимірністю відносно компонент матриці чутливості з відповідними матричними початковими умовами.

1. Бублик Б.Н., Гаращенко Ф.Г., Кириченко Н.Ф. Структурно-параметрическая оптимизация и устойчивость динамики пучков. – Киев, Наукова думка, 1985. – 304 с.

2. Гаращенко Ф.Г., Панталиенко Л.А. Анализ и оценка параметрических систем на основе методов практической устойчивости // Проблемы управления и інформатики. – 1996. – №1–2. – С.145–161.

3. Швець О.Ф., Сопронюк О.Л. Про матричні моделі для чисельного аналізу параметричної чутливості систем зі змінною вимірністю фазового простору // Вісник Київського університету.– Сер. Фізико-математичні науки. – 2010. – №1. – С. 152 – 157.

Шевчук Юлія Михайлівна, студент
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ, Україна
e-mail: nysya@hotmail.com

КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ В МОДЕЛЯХ ІНФОРМАЦІЙНОГО ПРОТИБОРСТВА

Шевчук Ю.М.

Для вирішення проблеми інформаційного протиборства можна розглядати різноманітні варіанти моделей і, маючи спостереження за реальною системою, виникає питання ідентифікації параметрів, які б давали можливість роботи з адекватною моделлю.

Зокрема, цікавими для розгляду є моделі, що задаються системою нелінійних диференційних рівнянь, оскільки вони дають можливість задавати різноманітний вигляд системи, не спрощуючи все до лінійного представлення.

В першу чергу для них виникає задача пошуку допустимої області для параметрів D_α, значення з якої дають стійкість системи в загальному випадку. Це вирішується за допомогою методів теорії стійкості з попередньою лінеаризацією системи нелінійних диференційних рівнянь.

Також виникає питання генерування даних про поведінку системи при різних значеннях параметрів системи, що вирішується за допомогою чисельних методів розв'язку диференційних рівнянь, зокрема, метод Рунге-Кутта четвертого порядку. Реалізуючи цей метод можна отримати набір розв'язків диференційного рівняння $x(t,\alpha)$, при різних значеннях $\alpha \in D_\alpha$.

Досліджувалися задачі моделювання траєкторій та ідентифікації в спеціальних популяційних моделях, що описують процеси інформаційного протиборства.

Була створена програмна реалізація в open-source середовищі R-programming, яке було обране за можливість зручної роботи з візуалізацією та великими об'ємами даних.

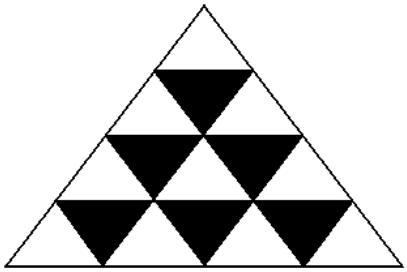
Отримана процедура є доволі простою в своєму змісті й при цьому ефективною для розв'язку задачі ідентифікації параметрів моделі.

1. Nakonechny O.G. Best-mean estimates in models of information confrontation/ Nakonechny O.G. //Abstracts XXIV International Conference "Problem of desigion making under uncertainties", September 1-5, 2014, Cesky Rudolec, Czech Republic. – 2014. -P.114-115

2. Chen P.P. Entity-relationship modelling: historical events, future trends, and lessons learned / P.P. Chen // Entity-Relationship Approach to Software Engineering: international conference, November 27-30, 2001, Yokohama, Japan: proceedings. – 2001. – P. 71-77.

DYNAMICAL SYSTEMS MODELLING

AND STABILITY INVESTIGATION



MODELLING
&
STABILITY

Section 2

METHODS AND TECHNOLOGIES OF COMPUTER MODELING

Valerii Maltsev
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine
e-mail: maltsev.valerii@gmail.com
Michael Pokojovy
University of Konstanz, Konstanz, Germany
e-mail: michael.pokojovy@uni-konstanz.de

ON A NONLINEAR HYPERBOLIC-LIKE FILTER FOR IMAGE PROCESSING

V. Maltsev, M. Pokojovy

Given a noisy RGB image occupying an axis-aligned domain $G := (0, L_1) \times (0, L_2)$ of $\mathbb{R}^2$, we consider a nonlinear anisotropic image restoration filter consisting of applying a hyperbolic-like semi-flow to the original picture. With $\mathbf{u} : (0,\infty) \times G \to \mathbb{R}^3$ and $\mathbf{S} : (0,\infty) \times G \to \mathbb{R}^{3\times 2}$ denoting the color intensity and the associated ``stress" tensor, our proposed system of partial integro-differential equations determining the underlying semi-flow reads as

$$\partial_t \mathbf{u} + \operatorname{div}(\mathbf{S}\nabla\mathbf{u}) = \mathbf{0} \text{ in } (0,\infty) \times G, \tag{1}$$

$$\tau_0 \partial_t \mathbf{S} + \mathbf{S} - \mathbf{F}(\nabla_\sigma \mathbf{u}) = \mathbf{0} \text{ in } (0,\infty) \times G, \tag{2}$$

$$(\mathbf{S}\nabla\mathbf{u})^T \mathbf{n} = \mathbf{0} \text{ on } (0,\infty) \times \partial G, \tag{3}$$

$$\mathbf{u}(0,\cdot) = \mathbf{u}^0 \text{ in } G, \tag{4}$$

$$\mathbf{S}(0,\cdot) = \mathbf{S}^0 \text{ in } G \tag{5}$$

for a fixed number $\kappa > 0$ and an appropriate matrix-function $\mathbf{F}$. Here, $\mathbf{u}^0 : G \to \mathbb{R}^3$ and $\mathbf{S}^0 : G \to \mathbb{R}^{3\times 2}$ stand for the initial color intensity and the stress tensor measured with respect to an additive color space, $\mathbf{n} : \partial G \to \mathbb{R}^2$ is the unit outer normal vector to G and

$$\nabla_\sigma \mathbf{u}(\mathbf{x}) := \nabla\left(\int_G \rho_\sigma(\mathbf{x} - \mathbf{y})\mathbf{u}(\mathbf{y})\mathrm{d}\mathbf{y}\right) \text{ for } \mathbf{x} \in G.$$

with a bandwidth $\sigma > 0$ and the kernel

$$\rho_\sigma(\mathbf{x}) := \tfrac{1}{\sigma^2}\rho(\tfrac{\mathbf{x}}{\sigma}) \text{ for } \mathbf{x} \in G.$$

Under appropriate assumptions, we prove the initial-boundary value problem (1) - (5) to possess a unique global strong solution. Further, we develop a finite element scheme to compute a numerical solution for this problem. Finally, we give an example of applying our filter to some sample noisy images.

1. G. H. Cottet, M. El Ayyadi, A Volterra Type Model for Image Processing, IEEE Transactions on Image Processing, 7(3), pp. 292-303 (1998)

2. M. Nitzberg, T. Shiota, Nonlinear Image Filtering with Edge and Corner Enhancement, IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 14(8), pp. 826-833 (1992)

Nataliya Valentynivna Mayko, Ph. D. (Phys.-Math.), As. Prof.,
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine,
e-mail: natmaiko@gmail.com
Vyacheslav Lvovych Ryabichev, Ph. D. (Phys.-Math.), As. Prof.,
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine,
e-mail: ryabichev@gmail.com

THE ERROR ESTIMATE OF THE FINITE-DIFFERENCE SCHEME FOR A TWO-DIMENSIONAL PARABOLIC EQUATION WITH ALLOWANCE FOR THE EFFECT OF THE BOUNDARY CONDITION

N. V. Mayko, V. L. Ryabichev

We obtain the error estimate of the conventional finite-difference scheme for solving a two-dimensional heat equation in a unit square with the homogeneous Dirichlet and Newton boundary conditions. The order of accuracy in the space-time parallelepiped is proved to be higher near the bottom and along the side surfaces where the Dirichlet boundary condition is specified.

We consider the problem

$$\begin{gathered}\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=\Delta u(x,t)+f(x,t),\quad (x,t)\in Q_T=Q\times(0;T);\\ -\frac{\partial u(x,t)}{\partial x_1}+\sigma u(x,t)=0,\quad (x,t)\in\Gamma_{-1}\times(0;T);\quad u(x,t)=0,\quad (x,t)\in\left(\Gamma\setminus\Gamma_{-1}\right)\times(0;T);\\ u(x,0)=\varphi(x),\quad x\in Q;\end{gathered}\tag{1}$$

where $\sigma=\text{const}\ge 0$, $x=(x_1,x_2)$, $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$, $Q=\{x=(x_1,x_2)\colon 0<x_\alpha<1,\alpha=1,2\}$ is a unit square, $\Gamma=\partial Q$ is the boundary of Q, $\Gamma_{-1}=\{x=(0,x_2)\colon 0<x_2<1\}$ is the left side of Q.

Introducing the grid sets:

$$\omega_\alpha=\{x_\alpha^{(i_\alpha)}=i_\alpha h_\alpha,\ i_\alpha=\overline{1,N_\alpha-1},\ h_\alpha=1/N_\alpha\},\ \omega_\alpha^-=\omega_\alpha\cup\{0\},\ \omega_\alpha^+=\omega_\alpha\cup\{1\},\ \bar\omega_\alpha=\omega_\alpha\cup\{0;1\},$$

$$\gamma_{-\alpha}=\{x_\alpha=0,\ x_{3-\alpha}\in\omega_{3-\alpha}\},\quad \gamma_{+\alpha}=\{x_\alpha=1,\ x_{3-\alpha}\in\omega_{3-\alpha}\},\quad \alpha=1,2;$$

$$\omega=\omega_1\times\omega_2,\quad \bar\omega=\bar\omega_1\times\bar\omega_2,\quad \gamma=\bar\omega\setminus\omega,\quad \omega_\tau=\{t_j=j\tau,\ j=\overline{1,M-1},\ \tau=T/M\},$$

($2\le N_\alpha$ and $2\le M$ are integer numbers), and making use of the operators T_1, T_2 (see [1]) we approximate problem (1) with the finite-difference scheme

$$\begin{gathered}y_{\bar t}(x,t)+(Ay)(x,t)=(T_1T_2f)(x,t),\quad (x,t)\in\left(\omega\cup\gamma_{-1}\right)\times\omega_\tau;\\ y(x,t)=0,\quad (x,t)\in\left(\gamma\setminus\gamma_{-1}\right)\times\omega_\tau;\quad y(x,0)=\varphi(x),\quad x\in\omega;\end{gathered}\tag{2}$$

where $A=A_1+A_2$, $A_1y=-y_{\bar x_1x_1}$, $x\in\omega$; $A_1y=-2/h_1\,(y_{x_1}-\sigma y)$, $x\in\gamma_{-1}$; $A_2y=-y_{\bar x_2x_2}$, $x\in\omega\cup\gamma_{-1}$.

Theorem. Let the solution $u(x_1,x_2,t)$ of problem (1) satisfy the conditions $\frac{\partial^4u}{\partial x_1^2\partial x_2\partial t},\frac{\partial^4u}{\partial x_1^2\partial x_2^2},\frac{\partial^4u}{\partial x_1\partial x_2^2\partial t},\frac{\partial^3u}{\partial x_1x_2^2},\frac{\partial^3u}{\partial x_1^2\partial t},\frac{\partial^3u}{\partial x_2^2\partial t},\frac{\partial^3u}{\partial x_1\partial x_2\partial t},\frac{\partial^2u}{\partial t^2},\frac{\partial^2u}{\partial x_1\partial t}\in L_2(Q_T)$. Then for the error $z(x,t)=u(x,t)-y(x,t)$ of scheme (2) the following a priori estimate with weight holds true:

$$\left(\sum_{\eta=\tau}^{t}\tau\frac{|z(x,\eta)|^2}{\rho^2(x)}\right)^{1/2}\le M\left(\tau^2h_2^2+h_2^4+\tau^2h_1^2+h_1^4+\tau^2+h_1^2h_2^2+h_1^2\right)^{1/2},$$

where $\rho(x)=\min\left\{\sqrt{(1-x_1)(1-x_2)},\ \sqrt{(1-x_1)x_2}\right\}$, and the constant M contains the norms of the derivatives indicated above.

1. *Samarskii A. A.* Difference schemes for Differential Equations with Generalized Solutions / *A. A. Samarskii, R. D. Lazarov, V. L. Makarov*. – M.: Vysshaya shkola, 1987. – 296 p. (in Russian).

Антонов Валерій Миколайович, доктор технічних наук, професор
Національний Технічний Університет України «КПІ», Київ, Україна
e-mail: vant46@mail.ru

КІБЕРАКМЕОЛОГІЧНЕ МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТА ДОСЛІДЖЕННЯ МЕДИКО-БІОЛОГІЧНИХ ПРОЦЕСІВ

Антонов В.М.

Українська Академії акмеологічних наук **УААН(відділення "Кібернетична акмеологія")** здійснює моделювання та дослідження Людини з метою конструювання Моделі Акме- Особи для розкриття сутності організму, його потенційно-ресурсних можливостей, самоактуалізації на основі проектування і реалізації ***Кібернетично - Акмеологічної Біологічної Системи*** (**КАБС**). **Мета розробки КАБС** - проаналізувати основні властивості організму людини (вроджені якості людської натури, інсайт), вплив на людину внутрішніх і зовнішніх факторів, спрогнозувати домінанту поведінки людини на основі її генотипу і виховання і визначити індивідуальні шляхи досягнення розвитку її акме- потенційно-ресурсних можливостей сформувавши у діалоговому режимі: поради, рекомендації, технології, алгоритми, програми, ігрові моделі поведінки тощо для зацікавленої Особи.

Автор, як керівник відділення "Кібернетична акмеологія" займається дослідженням проблеми «свободи» вибору Людини у сучасному світі та визначення Особою свого акме - шляху життєдіяльності на основі її базових потенційно-ресурсних параметрів. Автором з урахуванням попереднього досвідуна основі системного аналізу спроектована нова **Кібернетично-Акмеологічна Екпертно-Аналітична система (КАЕАС)** прогнозування життєдіяльності гармонійної акме- Людини, яка досліджує біля 4 000 чинників, що характеризують суть Людини (генотип, виховання, освіта) з метою визначення акме- тренду мети Особи на різних проміжках часу її життєдіяльності.

Функціями ефективності КАЕАС є: автоматизована акме- діагностика та акме-тестування; створення та ведення експертно-аналітичних баз даних, знань та мета знань; реалізація підсистем інтелектуальної підтримки прийняття рішень особою, яка приймає рішення (лікар, медик, біолог, психолог, парапсихолог, психоаналітик, акмеолог, кібернетик, математик, системний програміст та аналітик, фізіолог, соціолог, еколог тощо; експертно-аналітичне автоматизоване ведення потенційно-ресурсної інформації про Особу; автоматизоване експертно-аналітичне прогнозування стану організму людини; реалізація телемедичних **інтелектуальних технологій**; впровадження дистанційного навчання та самоосвіти; впровадження системи неперервної після дипломної освіти тощо. Аналіз автора ґрунтується на поняттях само актуалізації, самодостатності здорової людини, її автономності, відносної незалежності, а також на основі концепції і принципах таких наук, як кібернетична акмеологія, біхевіоральна кібернетика (***КіберАкмеБіхевіоризм***), ***КіберАкме-Аксіологія*** або Кібернетична аксіологія. ***КіберАкмеБіхевіоризм*** **–** це метод, напрям (підхід) до вивчення поведінки людини за допомогою засобів та методів кібернетики, а також у процесі роботи людини з біотехнічними системами, АІС, кібернетичними системами тощо.***КіберАкме-Аксіологія (Кібернетична акме- аксіологія, Акме- аксіологічна кібернетика)*** **–** підхід, метод, напрям до вивчення моральних, естетичних та інших цінностей людини, їх зв'язку між собою, із соціальними, культурними чинниками та особистістю людини за допомогою кібернетично-акмеологічних систем.

Автор розробляє та реалізує АВТОМАТИЗОВАНУ СИСТЕМУ на основі нової науки – КІБЕРНЕТИЧНА АКМЕОЛОГІЯ, **головне призначення якої МОДЕЛЮВАННЯ: Нормативно – Гармонійної Акме- Людини; Індивідуально – Гармонійної акме- Особи. Акме- Модель Особи** досліджується як: нормативна та індивідуальна (минула, поточна, майбутня-прогнозна).

Башук Олександр Олексійович, студент 6 курсу, факультет кібернетики,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
e-mail: a.bashuk@gmail.com

РНІ-ФУНКЦІЇ ДЛЯ КОНУСА ТА ПІВПРОСТОРУ, ЕЛІПСОЇДА ТА ПІВПРОСТОРУ

Башук О.О.

Задачі розміщення, зокрема задачі упаковки та розкрою, Packing&Cutting (див., наприклад, [1]), відносяться до класу NP-повних задач оптимізації.

При розв'язанні оптимізаційних задач розміщення, конструктивним засобом аналітичного опису відношень (включення, перетин, дотикання, неперетин) геометричних об'єктів є метод phi-функцій Стояна [2]. Цей метод дозволяє представити задачі розміщення у вигляді задач математичного програмування.

У роботі [2] приведено повний клас phi-функцій для неорієнтованих базових об'єктів. Однак клас однозв'язних базових об'єктів не включає об'єкти, що мають форму еліпсоїда або конуса.

Метою даного дослідження є побудова phi-функцій (у явному вигляді) для орієнтованих конуса та півпростору, а також для орієнтованих еліпсоїда та півпростору.

Для задачі побудови phi-функції для конуса K та півпростору P вважаємо, що конус задано нерівністю у декартовій системі координат: $\frac{x^2}{a_k^2}+\frac{y^2}{b_k^2}-\frac{\left(z-c_k\right)^2}{c_k^2}\le 0$, $z\in\left[0;c_k\right]$. Таким чином, полюс конуса знаходиться в центрі його основи та співпадає з початком системи координат, а його вісь збігається з віссю аплікат.

Для задачі побудови phi-функції для еліпсоїда E та півпростору P вважаємо, що еліпсоїд задано нерівністю у декартовій системі координат: $\frac{x^2}{a_e^2}+\frac{y^2}{b_e^2}+\frac{z^2}{c_e^2}\le 1$. Таким чином, полюс еліпсоїда знаходиться в його центрі симетрії та співпадає з початком системи координат, а його вісі збігаються з вісями координатної системи.

Півпростір P задається нерівністю $a_p x+b_p y+c_p z+d_p\ge 0$, параметри якої визначаються площиною, що обмежує півпростір, та розміщенням півпростору відносно цієї площини.

Враховуючи властивості phi-функцій [2] і особливості моделювання відношення дотику круга і півпростору, дотику кулі і півпростору, будуються неперервні всюди визначені функції Φ^{KP} (для конуса K та півпростору P) та Φ^{EP} (для еліпсоїда E та півпростору P). Доводиться твердження про те, що побудовані функції Φ^{KP} та Φ^{EP} є phi-функціями для відповідних пар об'єктів.

Побудовані phi-функції дозволять суттєво спростити побудову простору розв'язків при моделюванні та суттєво зменшити часові та обчислювальні витрати при розв'язанні задач оптимального розміщення для розглянутих пар об'єктів.

Задачі упаковки та розкрою мають широкий спектр практичних застосувань в машинобудуванні, легкій, текстильній промисловості та багатьох інших галузях.

1. Wascher G, Hauner H and Schumann H (2007) An improved typology of cutting and packing problems. European Journal of Operational Research 183(3, 16): 1109-1130.

2. Chernov N, Stoyan Y, Romanova T (2010) Mathematical model and efficient algorithms for object packing problem. Computational Geometry: Theory and Applications 43(5): 535-553.

Вакал Євген Сергійович, кандидат фіз.-мат. наук, доцент,
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
e-mail: jvakal@gmail.com ;
Вакал Юлія Євгеніївна, кандидат фіз.-мат. наук,
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
e-mail: iuliia.vakal@gmail.com;
Садова МаринаЮріївна, студентка 4 курсу, механіко-математичний факультет,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
e-mail: marina.sadovaya@gmail.com

МАТЕМАТИЧНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ МЕХАНІЗМУ СОРБЦІЇ В ЗАДАЧАХ МІГРАЦІЇ ЗАБРУДНЕНЬ

Вакал Є.С., Вакал Ю.Є., Садова М.Ю.

У зв’язку з техногенними впливами на навколишнє середовищезначну загрозу підземним водам несуть забруднення навколишнього середовищавідходами,викидами,стічнимиводамивсіх видівпромисловоговиробництва, сільського господарства, комунального господарства міст, якінабули глобального характеру.

Джерела забруднюючих речовин різноманітні, також багаточисельні види відходів і характер їхнього впливу на компоненти біосфери. Біосфера забруднюється твердими відходами, газовими викидами і стічними водами металургійних, металообробних і машинобудівних заводів. Величезної шкоди завдають водним ресурсам стічні води целюлозно-паперової, харчової, деревообробної, нафтохімічної промисловості. Постійне зростання масштабів морських перевезень викликало майже повсюдне забруднення берегів морів і океанів. Масове застосування мінеральних добрив і хімічних засобів захисту рослин призвело до появи отрутохімікатів в атмосфері, ґрунтах і природних водах, забрудненню біогенними елементами водойм і сільськогосподарської продукції.

Однимз істотних факторівзабруднення навколишнього середовища єнадзвичайні ситуації,техногенні аваріїтакатастрофи,врезультаті якихнегативний впливздійснюється практичнонавсі компонентинавколишнього середовища.

Оскільки в ґрунті відбувається рух підземних вод і дифузія забруднювача, цей процес може поширюватися на великі відстані від джерел забруднення. Разом з тим, при русі забруднень у ґрунті відбувається і очистка води внаслідок сорбції, а також повторне забруднення за рахунок десорбції забруднювача.

Дана робота присвячена математичному моделюванню забруднень у підземних фільтраційних потоках за допомогою нелінійного рівняння вологопровідності і рівняння конвективної дифузії. Кінетика сорбції забруднювача описується за допомогою задачі Коші для звичайного диференціального рівняння.

На основі методу скінченних різниць розроблено та реалізовано алгоритм чисельного розв’язку крайових задач. Розроблені алгоритми застосовано до розв’язання задачі руху забруднень у випадку, коли розподіл речовини між фазами здійснюється згідно різних типів ізотерм сорбції, зокрема, лінійної ізотерми Генрі, а також нелінійних ізотерм Ленгмюра та Фрейндліха. Досліджено вплив процесу сорбції на кінетику забруднювача. Наведено результати чисельних експериментів.

Аналіз результатів розрахунків свідчать, що процеси сорбції суттєво впливають на величину концентрації забруднень в ґрунтових потоках і повинні враховуватись при математичному моделюванні міграції забруднюючих речовин.

При дослідженнях руху забруднених речовин велику увагу слід приділяти задачам визначення невідомих параметрів сорбції та джерел забруднення ґрунтових вод по наявному полю концентрацій забруднювача.

Городецкий Виктор Георгиевич, кандидат физ.-мат. наук, доцент,
Национальный технический университет Украины «КПИ», Киев, Украина,
e-mail: v.gorodetskyi@gmail.com;
Осадчук Николай Павлович, ассистент,
Национальный технический университет Украины «КПИ», Киев, Украина,
e-mail: 13717421@ukr.net;

РЕКОНСТРУКЦИЯ СИСТЕМЫ РЕССЛЕРА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДА ПЕРСПЕКТИВНЫХ КОЭФФИЦЕНТОВ

Городецкий В.Г., Осадчук Н.П.

В [1] рассматривалось применение метода перспективных коэффициентов [2] для реконструкции системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) Рёсслера по одной наблюдаемой переменной. Будем называть искомую систему ОДУ оригинальной системой (ОС), а систему ОДУ, полученную численным методом — стандартной системой (СС) [3]. Рассматривалась ОС, имеющая общий вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3, \\ \dot{x}_2 = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3, \\ \dot{x}_3 = c_0 + c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 + c_4 x_1 x_2 + c_5 x_1 x_3 + c_6 x_2 x_3, \end{cases} \quad (1)$$

которой соответствует СС:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2, \\ \dot{y}_2 = y_3, \\ \dot{y}_3 = F(y_1, y_2, y_3), \end{cases} \quad (2)$$

где $y_1 \equiv x_3$, а $F(y_1, y_2, y_3)$ - дробно-рациональная функция с полиномами 4 степени в числителе и 2 степени — в знаменателе. В [1] показано, что если $c_4 = 0$, то коэффициенты СС могут быть аналитически выражены через коэффициенты ОС.

В качестве неизвестной ОС (1) была принята система Рёсслера, у которой $a_2 = a_3 = -1$, $b_1 = c_5 = 1$, $b_0 = 0{,}15$, $c_0 = 0{,}2$, $c_3 = -10$, а остальные коэффициенты (1) равны нулю. Используя аналитические соотношения между коэффициентами ОС и СС, а также числовые значения коэффициентов СС, было установлено, что существуют 3 системы ОДУ с 7 коэффициентами в правых частях уравнений, которые способны сгенерировать исследуемую временную последовательность. Каждая из трех систем ОДУ включает коэффициенты a_2, a_3, b_1, b_2, c_0, c_5 и один из коэффициентов a_0, b_0, c_3. Далее были однозначно определены числовые значения коэффициентов b_2, c_0, c_3 и выведены соотношения, связывающие остальные коэффициенты ОС между собой.

1. Городецкий В.Г., Осадчук Н.П. Аналитическая реконструкция систем R-класса // Проблемы управления и информатики. — 2015. — № 2. — С. 15-25.

2. Gorodetskyi V., Osadchuk M. Reconstruction of chaotic systems of a certain class // International Journal of Dynamics and Control. — DOI 10.1007/s40435-014-0100-y.

3. G. Gouesbet, Reconstruction of standard and inverse vector fields equivalent to the Rossler system, Phys. Rev. A 44 (1991) 6264-6280.

Ободан Наталия Ильинична, д-р. техн. наук, профессор
Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара, Днепропетровск, Украина
Гук Наталия Анатольевна, д-р. физ.-мат. наук, профессор
Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара, Днепропетровск, Украина
e-mail:nataly-guk@rambler.ru
Магас Алексей Сергеевич, аспирант
Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара, Днепропетровск, Украина

О КОРРЕКТНОСТИ НЕЙРОСЕТЕВОЙ АППРОКСИМАЦИИ РЕШЕНИЙ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ТИПА КАРМАНА

Ободан Н.И., Гук Н.А., Магас А.С.

Использование нейросетевой аппроксимации для решения обратной задачи для уравнения Кармана в виде [1] $H = F\left[\sum_{j=1}^{M}\alpha_j^k f\left(\sum_{p=1}^{P}\alpha_{jp}U_p^* + \alpha_{j0}\right) + \alpha_0\right]$ возможно в случае непрерывности отображения $U \to H$ по теореме Арнольда-Колмогорова, здесь H – вектор значений неизвестных функций обратной задачи; $U = \left\{U_p^*\right\}$ – вектор решений прямой задачи для системы уравнений Кармана; α – вектор весовых коэффициентов.

Уравнение типа Кармана (прямая задача) на области $\Omega : \left((x,y)\right|\ a_1 \le x \le b_1\ \ a_2 \le y \le b_2\big)$ при $U\big|_\Gamma = 0$, $\partial U/\partial n\big|_\Gamma = 0$ имеют вид [2]: $L_1(H) \equiv \nabla_{ij}\left(A_1^{ijkl}(H)\nabla_{kl}u_1\right) + 1^{ik}1^{kl}\left(B_{1ij}(H) + \nabla_{ij}u_1\right)\nabla_{kl}u_2 = 0$;

$L_2(H) \equiv \nabla_{ij}\left(A_2^{ijkl}(H)\nabla_{kl}u_2\right) + 1^{ik}1^{kl}\left(B_{1ij}(H) + \nabla_{ij}u_1\right)\nabla_{kl}u_1 = 0$; где $\nabla_{ij}(\cdot) = \partial^2(\cdot)\big/\partial x_i \partial x_j$; $i = 1,2$; $F \in L_{2\Omega}$; $A_i(H)$, $B_i(H)$ – известные функционалы от H; n- нормаль к кусочно-гладкой границе Γ области Ω.

Для доказательства непрерывности зависимости $U \to H$ используется топологическая лемма Тихонова, согласно которой, при существовании непрерывности отображения $H \to U$ и компактности $U_0 \in U$, $H_0 \in H$, отображение $U \to H$ также непрерывно. Для доказательства непрерывности отображения $H \to U$ вводятся: 1) специальные функциональные пространства типа Соболевских, отображающие свойства решений прямой задачи; 2) обобщенное решение прямой задачи; 3) соотношения, отражающие ограниченность и усиленную непрерывность каждого из функционалов в обобщенном решении, сформулированные на основе теорем вложения [3].

На основе свойств введенных функциональных пространств с помощью теоремы Рисса из обобщенного решения устанавливается существование операторов $G_1(H)$, $G_2(H)$, отображающих $H \to U$, для доказательства непрерывности операторов исследуется производная Фреше, показано, что главная часть приращения операторов $G_i(H)$ линейна по ΔH и ограничена. Из непрерывности отображения $H \to U$ следует непрерывность $U_0 \to H_0$, где $U_0 \in \tilde{U}$, $H_0 \in \tilde{H}$ – компактные множества.

Устанавливается, что обучающая выборка нейронной сети, построенная из решений прямой задачи $H \to U$, должна состоять из числа элементов $m = \overline{H} - \underline{H}/\Delta H$, где ΔH – малая величина, отвечающая условию ограниченности операторов $G_i(H)$; $\underline{H} \le H \le \overline{H}$. Приводятся результаты восстановления отображения $U \to H$, где H – толщина нелинейной тонкостенной оболочки, в зависимости от величины ΔH при различных правых частях Z.

1. Горбань А.Н. Обучение нейронных сетей / А.Н. Горбань. – М.: СССР-США СП «Параграф», 1990. – 160 с.

2. Ворович И.И. Математические проблемы нелинейной теории пологих оболочек / И.И. Ворович. – М.: Наука, 1989. – 373 с.

3. Швару Л. Анализ / Л. Швару. – М.: Мир, 1972. – 824 с.

Кашпур Олена Федорівна кандидат фіз.-мат. наук, доцент,
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
e-mail: kof_unicyb@mail.ru

ПРО ІНВАРІАНТНУ РОЗВ'ЯЗУВАНІСТЬ ЗАДАЧІ ІНТЕРПОЛЯЦІЇ ФУНКЦІЇ ДВОХ ЗМІННИХ

О.Ф.Кашпур

На практиці поширені задачі апроксимації функцій багатьох змінних. У випадку, коли функція задана своїми значеннями, одним із методів наближення є поліноміальна інтерполяція, при цьому виникають питання про умови існування та єдності інтерполянта.

В [1, 2] побудовано загальну теорію інтерполяції операторів в абстрактних гільбертових просторах, одержано умови інваріантної розв'язуваності задачі, т. т. розв'язок існує при будь-яких значеннях функції у вузлах.

В задачах ідентифікації об'єкта на основі спостереження за його реакцією на вхідні сигнали особливо цікавим є випадок, коли даної інформації недостатньо, т.т. число інтерполяційних умов є меншим, ніж число невідомих коефіцієнтів, що містяться в інтерполяційному поліномі. В цьому разі, як випливає із теорії інтерполяції функцій багатьох змінних [3], розв'язок поставленої задачі або не існує, або він неєдиний.

В роботі для розв'язання поставленої проблеми застосовано інтерполянт мінімальної норми [2] на послідовності вузлів із [4] та показано, що при виконанні умови $m \le l$, де m - число вузлів, l – розмірність підпростору поліномів в двовимірному евклідовому просторі, задача інваріантно розв'язувана та має єдиний розв'язок. Для функції двох змінних отримано більш загальні умови інваріантної розв'язуваності інтерполяційної задачі в порівнянні з умовами із [5].

1. Макаров В.В., .Хлобыстов В.В. Основы теории полиномиального операторного интерполирования. - НАН України. Ін-т математики. – Київ, 1998. – 278 с.

2. Макаров В.В., Хлобыстов В.В., Янович Л.А. Интерполирование операторов. – Киев, «Наукова думка», - 2000. - 406 с.

3. Бабенко К.И. Основы численного анализа. – НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика». – 2002. – 847 с.

4. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. – М.: Физматгиз. т.1.–1962.–632 с.

5. R.Chapko, C.Babenko, V. Khlobystov, V.Makarov. On the interpolation of a function on a bounded domain by its traces on parametric hypersurfaces. // International Journal of Compputer Mathematics. – 2014. – 91(8). – P.1673-1682.

Кубайчук Оксана Олексіївна, кандидат фіз.-мат. наук, доцент,
Національний університет харчових технологій, Київ, Україна,
e-mailkubaychuk@gmail.com;
Вовкодав Наталія Іванівна, кандидат фіз.-мат. наук, доцент,
Національний університет харчових технологій, Київ, Україна,
e-mail vovkodavn@ukr.net,
Кривець Тетяна Олексіївна, кандидат екон. наук, доцент,
Національний університет харчових технологій, Київ, Україна,

ARIMA МОДЕЛІ ТА ПОКРОКОВА РЕГРЕСІЯ В MS EXCEL

Кубайчук О.О., ВовкодавН.І., Кривець Т.О.

Застосування методів багатовимірного статистичного аналізу потребує використання комп'ютерної техніки та спеціалізованих програм (пакетів). Табличний процесор MS Excel залишається доступною альтернативою за умови розширення його функціоналу відповідно до потреб користувача. Наприклад, часто необхідно проаналізувати дані, які представлені у вигляді часового ряду (надбудова «Timeseries») або побудувати покрокову регресію (надбудова «Stepwiseregression»).

Деякі з нестаціонарних випадкових процесів, що породжують часовий ряд вдало описуються моделями типу ARIMA, запропонованими Боксом і Дженкінсом [1]. Побудова моделі проходить в кілька етапів: ідентифікація моделі, яка включає визначення порядку інтеграції моделі та підбір ARMA-моделі для отриманого «стаціонарного» ряду; оцінювання коефіцієнтів ідентифікованої моделі; аналіз залишків; прогнозування. Для ідентифікації ARIMA-моделі, зокрема, використовують вибіркові автокореляційну та часткову автокореляційну функції. На даному етапі, в рамках робіт над «Timeseries» пропонуються VBA-функції SACF – SamplPartialAutocorrelation і SPACF – SamplPartialAutocorrelationFunction, які поки що доступні, як функції робочих листів Excel. Діалог з користувачем відбувається таким чином: програма візуалізує досліджуваний часовий ряд та розраховує статистики; дає можливість узяти достатню кількість різниць і, таким чином, «остаціонарити» ряд; залишається, за виглядом SACF і SPACF зробити припущення про значення параметрів AR і MA-частин моделі.

Проблема знаходження залежностей між різного роду показниками є однією з основних у прикладному аналізі. З розвитком ЕОМ особливої популярності серед дослідників набувають покрокові алгоритми для конструювання ефективної множини предикторів. Уперше покрокова процедура послідовного включення-видалення змінних була запропонована А. Ефроімсоном в [2]. Алгоритм, описаний в [3] має незначні відмінності від алгоритму Ефроімсона і називається стандартною покроковою процедурою або ж F-методом. Важливою є її модифікація, що доповнює чисто статистичні критерії відбору інтуїтивними

Надбудова «Stepwiseregression» реалізує стандартної покрокову процедуру з можливістю заміни змінних на кожному кроці.

1. E. P. Box, M. Jenkins, C. Reincel. Time Series Analysis: Forecastingand Control, 4thEd., Willey, 2008. – 784 p..

2. EfroimsonM.A.Maltiple regression analysis / M.A. Efroimson.– In: Mathematical Methods for Digital Computers, Ed. By Ralston A. And WilfH. S., N.Y., 1960. – P.191 – 203.

3. АфифиА.Статистический анализ: Подход с использованием ЭВМ / А.Афифи, С. Эйзен.– М.: Мир, 1982. – 488 с.

Махно Михайло Федорович, аспірант,Савеленко Марія Сергіївна, студент, факультет кібернетики,
КНУ имени Тараса Шевченко, Киев, Украина
e-mail: mikhail@makhno.kiev.ua

МЕТОД ВИРІШЕННЯ ОБЕРНЕНОЇ ЗАДАЧІ РОЗПОДІЛУ РЕСУРСІВ МЕРЕЖЕВИХ СЕРВЕРІВ

Махно М.Ф., Савеленко М.С.

Задачі оптимального розподілу ресурсів є одними з найголовніших оптимізаційних задач, що вирішуються при проектуванні складних систем, визначенні їх структури і способів функціонування. Тому розробка нових ефективних методів вирішення задач розподілення має велике практичне значення.

Розглядається один з різницевих методів розв'язання обернених задач розподілу неоднорідних ресурсів, який має назву методу найменших відхилень [1].

Обернену задачу можна сформулювати так.Необхідно визначити кількість засобів і обрати такий спосіб їх розподілення за обсягами ресурсів, що обслуговуються, щоб заданий рівень ефективності виконання засобами поставленої задачі досягався при їх мінімальних витратах. Дану задачу можна розглядати при визначенні кількості комунікаційних серверів різної потужності для обслуговування запитів на отримання даних з мережі Інтернет.

Нехай $n_i, i=\overline{1,N^*}$ - кількість серверів, що використовуються для забезпечення доступу користувачів до глобальної мережі, $m_j, j=\overline{1,M}$ - обсяги запитів (рівні пропускної здатності) користувачів локальної мережі. Кожен з серверів забезпечує відповідну ширину смуги пропускання $P_i, i=\overline{1,N^*}$, що використовується для підключення групи користувачів, сумарна потужність з'єднань яких не перевищує $P_i, i=\overline{1,N^*}$, а пропускна здатність кожного з'єднання не менше за $m_j, j=\overline{1,M}$.

План розподілу серверів для обслуговування запитів будемо характеризувати матрицею $h=\{h_{ij}\}, i=\overline{1,N^*}, j=\overline{1,M}$, де h_{ij}=0, якщо *i*-й сервер не виділяється для обслуговування *j*-го запиту, і h_{ij}=1, якщо *i*-й сервер обслуговує запит *j*-го користувача.

Таким чином, необхідно знайти такі значення N^* та h^*, які є розв'язком задачі

$$\min(N(h)\,|\,Q_{ij}\ge m_j,\ j=\overline{1,M},\sum_{j=1}^{M}h_{ij}Q_{ij}\le P_i,\ i=\overline{1,N^*},\ N^*\le N(h),\ h\in H), \qquad (1)$$

де Q_{ij}- рівні пропускної здатності *i*-го сервера для обслуговування*j*-го користувача, $i=\overline{1,N^*}$, $j=\overline{1,M}$, H - множина можливих планів розподілу серверів.

Множина H задається обмеженнями у вигляді

$$\sum_{i=1}^{N}h_{ij}\le 1,\ j=\overline{1,M}, \qquad (2)$$

тобто обслуговування запитів кожного користувача може здійснюватися лише одним з серверів.

Для вирішення задачі (1), (2) запропонований алгоритм, що базується на принципі послідовного призначення обчислювальних ресурсів, за котрим на кожному кроці процесу оптимізації підтримується такий розподіл, який забезпечує найменший приріст критерію.

1. Берзин Е.А.Оптимальное распределение ресурсов и элементы ситеза систем. – М.: Сов. Радио,1974.

НестеренкоБорисБорисович, док. техн. наук, професор,
Інститут математики НАН України, Київ, Україна,
e-mail: model@imath.kiev.ua;
Новотарський Михайло Анатолійович, док. техн. наук, с. н. с.,
Інститут математики НАН України, Київ, Україна,
e-mail: novot@imath.kiev.ua

МОДЕЛЮВАННЯ РУХУ РІДИН В БІОЛОГІЧНИХ ОБ'ЄКТАХ

Нестеренко Б.Б., Новотарський М.А.

Математичне моделювання руху рідин в біологічних об'єктах пов'язане з рядом ускладнень, серед яких варто відмітити значну мінливість фізичних параметрів та труднощі їх вимірювання. Рух рідин, як правило, виникає завдяки коливанню стінок вміщуючих рідину об'єктів. Для моделювання згаданих коливань, які називають також перистальтичними процесами, застосовують математичний апарат, що базується на представленні математичної моделі рівняннями Нав'є-Стокса. Для комп'ютерної реалізації таких моделей необхідно використовувати чисельні методи, які потребують значної кількості обчислень та мають ряд проблем, пов'язаних зі стійкістю та швидкістю збіжності. Тому математичне моделювання за допомогою традиційних підходів суттєво утруднене за умови використання областей складної форми з рухливими границями.

З метою підвищення точності моделювання та зменшення кількості обчислень для моделювання руху рідин в біологічних об'єктах запропоновано застосувати технологію моделювання «знизу-вверх», яка базується на рівнянні Больцмана без впливу зовнішніх сил [1]:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{e}\nabla f = \Omega(f),$$

де f — функція розподілу елементарного об'єму рідини, t — час, $\mathbf{e}$ — вектор швидкості, $\Omega\ f$ — оператор колізій.

Оператор колізій для довільної точки i з області дослідження представлений виразом:

$$\Omega_i = \frac{1}{\tau}\left(f_i - f_i^{(EQ)}\right),$$

де τ — коефіцієнт релаксації у напрямку рівноважного стану, f_i^{EQ} рівноважна функція розподілу для точки i.

Суть технології «знизу-вверх» полягає у тому, що за результатами моделювання на мікроскопічному рівні формують макроскопічні параметри руху рідини з виразів:

$$p = \sum_{i=1}^{n} f_i \quad \text{і} \quad u = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{e}_i f_i,$$

де p — тиск рідини, u — поле швидкостей рідини.

Такий підхід до моделювання руху рідин в біологічних об'єктах дозволив істотно підвищити точність моделювання через урахування форми обмежувальних поверхонь та складної еволюції її рухів. Зокрема, з використанням бібліотек Limbes створено програмне забезпечення для дослідження особливостей руху рідин у травному тракті людини, які виникають внаслідок виконання коригуючих операцій. Ці дослідження послужили основою розробки нових підходів до виконання згаданих операцій з метою підвищення їх ефективності.

1. Mohamad A.A. Lattice Boltzmann method / A.A. Mohamad. — London:Springer-Verlag. — 2011. — 178 p.

Олійник Андрій Петрович, докт. техн. наук, професор, зав. каф. математичних методів в інженерії
Івано-Франківський національно-технічний університет нафти і газу, Івано-Франківськ, Україна,
e-mail: andrij-olijnyk@rambler.ru,
Райтер Петро Миколайович, докт. техн. наук, професор, зав. каф. технічної діагностики і моніторингу
Івано-Франківський національно-технічний університет нафти і газу, Івано-Франківськ, Україна,
e-mail: andrij-olijnyk@rambler.ru

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТЕЧІЇ ВЯЗКОЇ РІДИНИ В ГАЗОРІДИННИХ СВЕРДЛОВИННИХ ПОТОКАХ

Олійник А.П., Райтер П.М.

Задача оцінки параметрів течії у свердловинних потоках є актуальною науково-технічною задачею, рішення якої дозволяє визначити, яким чином малі витоки та поступлення суміші та координати точок їх розміщення впливають на розподіл швидкостей та тиску в свердловинній колоні. З цією метою розв'язується система рівнянь Нав'є-Стокса в двовимірній області:

$$\begin{cases} u\dfrac{\partial u}{\partial x}+v\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{1}{\rho}\cdot\dfrac{\partial p}{\partial x}+\nu\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+g \\ u\dfrac{\partial v}{\partial x}+v\dfrac{\partial v}{\partial y}=-\dfrac{1}{\rho}\cdot\dfrac{\partial p}{\partial y}+\nu\left(\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial y}=0 \end{cases}. \quad (1)$$

Вважається, що $p=p_0-kx$, k – перепад тиску, з граничними умовами:

$$\begin{cases} u\Big|_{x=0}=-\dfrac{ky^2}{4\mu}+\dfrac{kRy}{2\mu} \\ u\Big|_{y=0}=u\Big|_{y=2R}=0 \\ v\Big|_{x=0}=v\Big|_{y=0}=0 \\ v\Big|_{y=2R}=\begin{cases}0, \text{x}\le \text{x}_1, x\ge x_2 \\ \pm V_{вит}, x\in[x_1,x_2]\end{cases} \end{cases}. \quad (2)$$

Граничні умови (2) дозволяють враховувати як можливі витоки, так і поступлення суміші в свердловинну колону.

Розроблено чисельний різницевий метод розв'язання системи (1) з умовами (2), доведено їх збіжність та стійкість за спектральною ознакою, побудовано та реалізовано розрахунковий алгоритм з використанням методу прогонки, виявлено оптимальні параметри розрахункової сітки.

Проведені розрахунки виявили добре узгодження одержаних результатів з теоретичними положеннями [1] відносно течії рідини та формування пограничного шару.

За результатами розрахунків для свердловин різного діаметру, для широкого класу рідин, газів та конфігурацій зон витоків, їх розмірів та інтенсивності витоків встановлено особливість розподілу компонент швидкості по довжині свердловини, критерії виявлення координат точок витоку або поступлення суміші в свердловинну колону.

1. Modeling of fluid flow in pipeline with the leaks due to the surface.- / A.P.Oliynyk, L.O.Shtayer // - Journal of Hydrocarbon Power Engineering. 2014, Vol 1, Issue 1 – pp. 45-52.

ПашкоАнатолійОлексійович, кандидатфіз.-мат. наук, доцент,
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
e-mail: aap2011@ukr.net;

РОЗВЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ БУДІВЕЛЬНОЇ МЕХАНІКИ МЕТОДАМИ СТАТИСТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ

Пашко А.О.

Багато задач будівельної механіки описуються крайовими рівняннями. Розвязування таких задач при наявності випадкових складових зводиться до оцінки статистичних характеристик розвязків. Використання методів статистичного моделювання дозволяє оцінити сам розвязок, тобто, побудувати реалізації розвязків за якими можна оцінювати статистичні характеристики. В задачах будівельної механіки використовуються крайові задачі другого і більш високих порядків. Так, рівняння деформації пружньої пластини має вигляд

$$\Delta^2 u(\vec{x}) = \frac{f(\vec{x})}{D}, \quad \vec{x} \in G \subset R^2, \tag{1}$$

де $u(\vec{x})$ - нормальний вигин пластини в точці $\vec{x}$, $f(\vec{x})$ - інтенсивність нормального навантаження, як правило, реалізація випадкового поля, D - деяка константа, повязана з властивостями пластини.

Початкові умови залежать від способу кріплення пластини - вільно обперта, жорстко закріплена, чи інші варіанти. Оскільки границя пластини, як правило, кусково - лінійна функція, то можна розглядати варіанти, коли різні частини границі закріплені по різному.

В роботі [1] досліджувались властивості випадкових навантажень. Так, для оцінки показників надійності рекомендовано використовувати випадкові поля із дробово - раціональними спектральними щільностями. Наприклад,

$$S(\vec{w}) = \frac{a\sigma^2(b^2 + |\vec{w}|^2)}{\pi(4a^2 |\vec{w}|^2 + (|\vec{w}|^2 - b^2)^2)}.$$

Алгоритм розвязку: 1. будуємо реалізації випадкових полів з відомими спектральними щільностями з заданими точністю і надійністю в деякому функціональному просторі; 2.для отриманої реалізації розязуємо рівняння (1) з відомими крайовими умовами чисельними методами (наприклад, метод решіток); 3. за достатньої кількості отриманих реалізацій оцінюємо середнє значення розвязку.

В роботі [2] досліджувались методи моделювання гауссових випадкових полів з заданими точністю і надійністю в різних функціональних просторах.

Використання методів статистичного моделювання для розвязку вказаних задач вивчались в роботах [3-4]. Алгоритм розвязку зводиться до формулювання крайової задачі у вигляді інтегральних рівнянь і використання методів статистичного моделювання для знаходження їх розвязків. В роботі приведено порівняння отриманих результатів обома способами.

1. Болотин В.В. Случайные колебания упругих систем. / В.В. Болотин. – М.: Наука, 1979. – 336 с.

2. Пашко А.А. Чисельное моделирование гауссовских однородных случайных полей / А.А. Пашко // Научный весник Ужгородского университета. Серия: Математика и информатика. – 2013. – Вип. 24, №1. - С. 116-120.

3. Елепов Б.С.Решение краевых задач методом Монте-Карло. / Б.С. Елепов, А.А. Кронберг, Г.А. Михайлов, К.К. Сабельфельд. - Новосибирск: Наука, 1980. -175 с.

4. Сабельфельд К.К. Методы Монте-Карло в краевых задачах. / К.К. Сабельфельд. - Новосибирск: Наука, 1989. - 280 с.

Петрович Валентина Миколаївна, канд. техн. наук,
Київський національнимй університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна
e-mail: filonval@i.com.ua
Требіна Наталія Миколаївна,провідний інженер-математик, факультету кібернетики,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
e-mail: natasha_treb@ukr.net

ЗАДАЧА ПРО МОДЕЛЮВАННЯ ТА АНАЛІЗ ДИНАМІКИ ТЕХНОЛОГІЧНОГО ПРОЦЕСУ ВИДІЛЕННЯ ЦУКРОЗИ З РОЗЧИНУ

Петрович В.М., Требіна Н.М.

Дане дослідження присвячене знаходженню технологічної залежності між структурою затрат ресурсів (вмісту сухих речовин у сиропі та оптимальною в'язкістю) і максимально можливим випуском продукції (цукрози) в автоматизованому управлінні процесом цукрового виробництва [1]. Рівняння динаміки процесу мають наступний вид [2]:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(t,x,y,z) - ux,\ x(0) = x_0, \\ \dot{y} &= -\alpha f(t,x,y,z) + u\left(y^0 - y\right),\ y(0) = y_0, \\ \dot{z} &= (\alpha - 1) f(t,x,y,z) - uz,\ z(0) = z_0, \end{aligned} \tag{1}$$

де $f(t,x,y,z) \geq 0$ - відома виробнича функція, що задовольняє всі необхідні умови існування розв'язку задачі Коші (1) на часовому проміжку $[0,T]$, (x_0, y_0, z_0) - задане початкове значення розв'язку (x,y,z). Для системи (1) проведено параметричну оптимізацію математичної моделі на основі експериментальних даних на часовому проміжку $[0,T]$та розв'язана задача Коші. В результаті обчислювального експерименту запропоновано математичну залежність коефіцієнта насичення від співвідношення «нецукор». Побудованівідповідні графіки.

1. Silin P.M. Technology sugar. – Moskow:Food industry, 1967. – 625 p.
2. Ляшенко І.М., Коробова М.В., Столяр А.М. Основи математичного моделювання економічних, екологічних та соціальних процесів: Навч. пос. / І.М. Ляшенко, М.В. Коробова, А.М. Столяр. – Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2006. – 304 с.
3. Основы теории оптимального управления / Под редакцией В.Ф. Кротова. – М: Высш. шк., Наука, 1990. – 430 с.
4. Петрович В.М. Ідентифікація параметрів математичних моделей динамічних систем керування //Штучний інтелект. – 2011.№4. – С. 343 – 349.

Проскуряков Ростислав Олегович, студент 4 курса, факультета кибернетики,
Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, Киев, Украина,
e-mail: proskuryakov.r@gmail.com;

ВЕБ-ПРИЛОЖЕНИЕ ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ НА БАЗЕ МКЕ

Проскуряков Р.О.

Текущие возможности web-технологий позволяют достичь нового уровня доступности и наглядности применения математики для моделирования реальных физических процессов. Реализация программы в виде web-приложения имеет ценность как для выполнения непосредственно моделирования, так и для изучения и развития соответствующих численных методов.

Для моделирования процесса распространения загрязнения используем следующее уравнение:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x,y,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(l(x,y,t)\frac{\partial u}{\partial y}\right) + v(x,y,t)\frac{\partial u}{\partial x} + d(x,y,t)\frac{\partial u}{\partial y} + c(x,y,t)u + f(x,y,t) \quad (1)$$

При заданных начально-краевых условиях:

$$\begin{cases} u(x,y,t)\big|_{t=0} = u_0(x,y) \\ u(x,y,t)\big|_{x=0} = p_0(t,y);\ u(x,y,t)\big|_{x=1} = p_1(t,y), \\ u(x,y,t)\big|_{y=0} = q_0(t,x);\ u(x,y,t)\big|_{y=1} = q_1(t,x) \end{cases} \quad (2)$$

Здесь $u(x,y,t)$ - это искомая концентрация вещества. Выбор задачи обусловлен тем, что проблема распространения загрязнений актуальна последние десятилетия и, видимо, будет оставаться таковой достаточно долго. При этом на практике достаточно адекватно ведёт себя именно двумерная (по пространству) математическая модель, которая, к примеру, отвечает ситуации распространения загрязнений в однородном по вертикали пласте грунта.

Для решения задачи применён метод конечных элементов (МКЕ), который относится к вариационным численным методам решения дифференциальных уравнений. Суть метода состоит в следующем: исходная область V делится на конечное количество подобластей V_i, $i = \overline{1,n}$, на каждой из которых решение приближается комбинацией одной или нескольких функций простой структуры. В работе для решения задачи (1), (2) применяется триангуляция области V, то есть область разбивается на n треугольников V_i. Само решение ищется в виде $u(x,y,t) = \sum_{i=1}^{n} C_i \varphi_i$, где φ_i - известные базисные функции, принимающие ненулевые значения только на одном треугольнике, а C_i - неизвестные коэффициенты.

Для задания параметров модели, отображения и работы с результатами моделирования используются возможности HTML5, который является продолжением стандарта версии 4.01, и сохраняет с ним обратную совместимость. При этом в 5-й версии добавлены новые возможности, благодаря которым HTML перестал быть просто языком разметки. Важные для данной работы функции HTML5 включают поддержку отображения математических формул, объект Canvas для работы с графикой (который, в числе прочего, позволяет отображать график решения и работать с ним) и локальное хранилище данных. Все это, вдобавок к автоматически появляющейся возможности предоставить доступ к работе с моделью всем желающим, и обусловило выбор веб-платформы для решения поставленной задачи.

Ройбул Павел Аркадьевич, магистр «Радиотехники», начальник участка,
Запорожская дистанция сигнализации и связи, ДП «Приднепровская железная дорога», Запорожье, Украина,
e-mail: roybul_paul@mail.ru

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ ПОДВЕСА ВАГОНА С УЧЕТОМ АЭРОДИНАМИЧЕСКИХ СИЛ

Ройбул П.А.

Построим математическую модель динамики вагона на магнитном подвесе. Будем считать, что вагон (рис. 1) свободно подвешен только при помощи магнитного взаимодействия токов, протекающих в витках прямоугольной формы (1, 3, 5, 7) которые жестко связаны с магнитной путепроводной системой и витках прямоугольной формы жестко связанных с вагоном (2, 4, 6, 8). Аэродинамические силы R_x, R_y, R_z, действующие

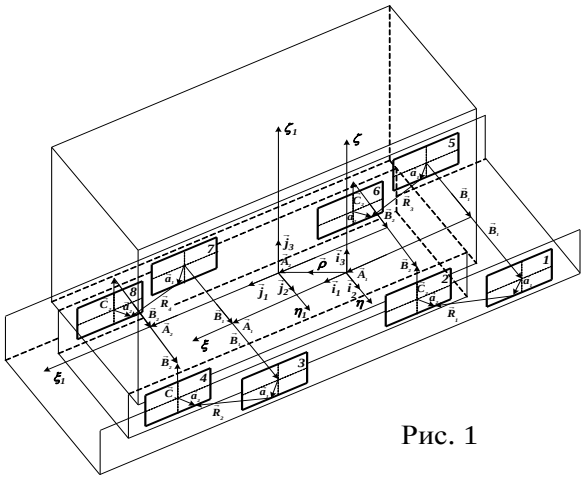


Рис. 1

на твердое тело в продольном, поперечном и вертикальном направлениях, и моменты M_{Rx}, M_{Ry}, M_{Rz}, можно определить, как показано в работе [1], из выражений:

$$R_x = -C_x q_0 S_0,\ R_y = C_y q_0 S_0,\ R_z = -C_z q_0 S_0,$$

$$M_{Rx} = m_x q_0 S_0 L, \qquad M_{Ry} = m_y q_0 S_0 L,$$

$$M_{Rz} = m_z q_0 S_0 L.$$

Так как тело связано с подвижной системой координат, то для построения математической модели используем углы Эйлера – Крылова. Определив аналитически потенциальную и кинетическую энергии и воспользовавшись уравнением Лагранжа получим математическую модель физического процесса в виде системы дифференциальных уравнений с квадратичной нелинейностью.

Её решения можно найти численно и проанализировать влияния разных воздействий на их поведения. На основе математической модели создана программа в пакете Maple 14, которая с достаточной точностью моделирует физический процесс. Система имеет решения, зависимости перемещений подпрыгивания и бокового перемещения корпуса от пройденного пути представлены на рис. 2-3.

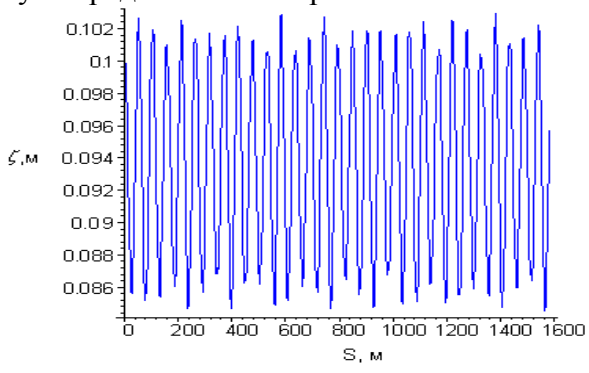


Рис. 2

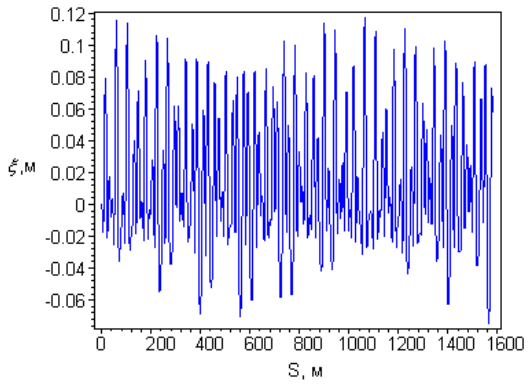


Рис. 3

1. Арнольд В.И. Математические методы классической механики.– М.:Наука,1974–432с.

Тимофієва Надія Костянтинівна, доктор технічних наук, старший науковий співробітник,
Міжнародний науково-навчальний центр інформаційних технологій та систем НАН та МОН України.
e-mail: TymNad@gmail.com

ПРО ПОДІБНІСТЬ ДИНАМІЧНИХ ЗАДАЧ КОМБІНАТОРНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ

Тимофієва Н.К.

В комбінаторній оптимізації можна навести багато прикладів, коли задачі з різних класів розв'язуються за однією і тією ж обчислювальною схемою. Ця властивість в літературі достатньою мірою не висвітлена, хоча існуючі універсальні методи орієнтовані на розв'язання різноманітних задач. Розглянемо цю властивість для динамічних задач.

Назвемо задачі комбінаторної оптимізації динамічними, якщо в процесі їхнього розв'язання генерується поточна інформація, за якою оцінюється результат, а пошук оптимального розв'язку проводиться поетапно з обчисленням часткових сум цільової функції.

Отже, основними ознаками подібності динамічних задач є зміна результату розв'язання в часі та для його поточного відліку обчислення часткової цільові функції.

Для розв'язання динамічних задач дискретної математики, як правило, використовують динамічне програмування. Процес їхнього розв'язання цим методом описується орієнтованим ациклічним графом, часткові значення цільової функції змінюються в часі та обчислюються за рекурентними правилами. До того ж при її оцінці для неї виконується принцип Беллмана.

Розглянемо такі динамічні задачі як сегментація та розпізнавання мовленнєвих сигналів та задачу Джонсона з теорії розкладів. Визначимо для них аргумент цільової функції.

Найпростіша задача з теорії розкладів (задача Джонсона) формулюється так. Задано n деталей. Їхню множину позначимо $A=\{a_1,...,a_n\}$. Кожна із деталей a_j повинна пройти послідовну обробку на m машинах $B=\{b_1,...,b_m\}$, тобто кожна деталь потребує для свого обробітку одну операцію. Кожна машина також виконує одну операцію. Необхідно скласти такий розклад обробітку деталей, щоб затрачений на ці операції час був би мінімальний за умови, що він не перевищує заданої величини T. Аргументом цільової функції в ній є розміщення без повторень, яке утворюється шляхом знаходження сполучення із n елементів по d, для якого генеруються $d!$ перестановок, $d\in\{1,...,n\}$. Задача сегментації мовленнєвих сигналів полягає у виділенні на заданому відрізку вхідного сигналу майже періодичних та неперіодичних ділянок, а в майже періодичних визначаються довжини поточного майже періоду. Розпізнавання мови – це процес автоматичної обробки мовленнєвого сигналу з метою визначення послідовності слів, яка передається цим сигналом. Ця задача полягає у знаходженні для вхідного сигналу найбільш правдоподібного еталону з усіх можливих еталонних сигналів.

Усі три задачі описуються орієнтованим ациклічним графом, а часткові значення цільової функції змінюються в часі та обчислюються за рекурентними правилами. Можна довести, що при знаходженні оптимального значення часткової цільової функції виконується принцип Беллмана. Моделюваня динамічних задач з використанням теорії комбінаторної оптимізації показує, що аргументом цільової функції в них є вибірки різних типів: сполучення без повторень та розміщення як з повтореннями так і без повторень. Оскільки ці комбінаторні конфігурації утворюються послідовним вибиранням елементів з базової множини та формують кортежі або траєкторії, то процес розв'язання задач комбінаторної оптимізації змінюється в часі. Завдяки цій властивості пошук оптимального розв'язку можна проводити поетапно, а сам його процес описувати ациклічним орієнтованим графом. Тобто, ці задачі подібні за аргументом цільової функції.

Янчевський Ігор Владиславович, докт. фіз.-мат. наук, доцент,
Харківський національний автомобільно-дорожній університет, Харків, Україна,
e-mail: yanchevsky@ukr.net

ВІСЕСИМЕТРИЧНІ КОЛИВАННЯ НЕЗАМКНЕНОЇ ЕЛЕКТРОПРУЖНОЇ СФЕРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ ПРИ ІМПУЛЬСНОМУ ЕЛЕКТРОМЕХАНІЧНОМУ НАВАНТАЖЕННІ

Янчевський І.В.

Електропружні елементи знаходять широке застосування в сучасних технічних пристроях у якості ефективних електромеханічних перетворювачів енергії. І серед всього розмаїття виконань досить розповсюдженими є елементи у вигляді тонких сферичних оболонок [1]. Тому вивчення закономірностей деформування п'єзоелементів сферичної форми при різних варіантах їх закріплення, електродування і навантаження має очевидне прикладне значення.

У повідомленні представлено чисельно-аналітичний метод розв'язання задачі про нестаціонарні вісесиметричні коливання незамкненої сферичної біморфної оболонки, яка складена з тонких металевого та поляризованого за товщиною п'єзокерамічного шарів. На підставі класичних гіпотез Кірхгофа-Лява, узагальнених на випадок електромеханіки [2], отримані система диференціальних рівнянь руху поверхні зведення двошарової електропружної оболонки та граничні умови механічної та електричної груп.

Конкретні розв’язки наведені для оболонки, край якої жорстко защемлений або взаємодіє з пружним коротким циліндричним тонким кільцем. Методологія розв’язання побудована на інтегральному перетворенні Лапласа за часовою змінною, розвиненні шуканих функцій у ряди за приєднаними функціями Лежандра та введенні додаткових невідомих навантажень вздовж краю оболонки для наближеного задоволення граничних умов механічної групи. Запропонованим методом задача зведена до системи інтегральних рівнянь Вольтерра, розв'язання якої виконано чисельно із залученням регуляризуючого алгоритму Тихонова з метою забезпечення стійкості обчислень.

В рамках теорії тонких електропружних оболонок побудовано також розв’язок задачі про нестаціонарні коливання вісесиметрично навантаженої біморфної пологої сферичної оболонки. Принциповим моментом розв’язання є представлення функцій переміщення поверхні зведення у вигляді суми «квазістатичної» та «динамічної» складових, остання з яких записана рядом Фур’є-Бесселя.

Чисельні експерименти проведені для східчастих конфігурацій механічного та електричного навантажень оболонок та виконані аналізи впливу граничних умов та товщин шарів на характеристики перехідного процесу.

Отримані розрахункові вирази дозволяють досліджувати коливання нестаціонарно навантажених електропружних сферичних оболонок чи круглої пластини (за умови досить великого значення радіуса кривини поверхні з’єднання шарів) і при інших варіантах граничних умов. Розвинутий підхід може бути узагальнений на випадок секціонованого струмопровідного покриття електропружного шару. До переваг методу слід віднести простоту чисельної реалізації та можливість контролю точності результатів.

1. *Савин В.Г.*Нестационарная гидроэлектроупругость сферических пьезоэлектрических преобразователей / В.Г. Савин, А.В. Збруцкий, И.О. Моргун. – К.: НТУУ «КПИ», 2013. – 241 с.

2. *Механика* связанных полей в элементах конструкций: [в 5 т.] / Под общ. ред. А.Н. Гузя. Т. **5**. Электроупругость / Гринченко В.Т., Улитко А.Ф., Шульга Н.А. – К.: Наук. думка, 1989. – 280 с.

Завадський Ігор Владиславович, кандидат. фіз.-мат. наук, доцент,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
e-mail: ihorza@gmail.com
Лавро Владислав Михайлович, студент 4 курсу, факультет кібернетики,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
e-mail: vm.lavro@gmail.com

ВИМОГИ ДО СУЧАСНИХ АВТОМАТИЗОВАНИХ СИСТЕМ ТЕСТУВАННЯ

Завадський І.О., Лавро В.М.

В умовах сучасного інформаційно-розвиненого суспільства важливе місце посідають автоматизовані системи навчання та контролю знань. Такі системи знаходять застосування в багатьох сферах суспільного життя, починаючи від школи, вищих навчальних закладів та закінчуючи корпоративними системи підвищення кваліфікації кадрів. Але найбільшою сферою, яка потребує уваги є ВНЗ. Існує безліч програмних засобів, які в тій, чи іншій мірі вирішують проблеми автоматизованої перевірки знань. Проаналізувавши найпопулярніші з них(Moodle, OpenTest, ClassMarker, Let's test), врахувавши переваги та недоліки кожного, ми обрали найбільш оптимальні критерії для ефективної системи тестування знань.

Загальні вимоги до системи

зручність та простота інтерфейсу;

користування в режимі on-line;

розгалужена рольова система користувачів(головний адміністратор, викладач, староста групи, учень);

інтерактивна система статистики;

розподіл учнів по групам та підгрупам;

можливість рандомізації питань та відповідей

Повне логування дій користувача

Система нагадувань користувачу про важливі події та дати через електронну пошту та sms

Форматування запитань та відповідей

можливість додавання фото-, аудіо-, відео-інформації;

можливіть вставки Latex-формул;

використання базових html-тегів

Наявність таких типів запитань

з одним вірним варіантом відповіді;

з декількома вірними варіантами відповіді;

встановлення відповідностей між варіантами відповідей із двох груп;

встановлення відповідностей між варіантом відповіді та областю на картинці;

встановлення правильної послідовності фактів, явищ або подій;

повне співпадіння відповіді;

відкрита відповідь для перевірки викладачем

Для застереження можливості вгадування відповідей особою, що проходить тестування можливе використання різних підходів. Найбільш ефективні підходи:

Використання формули Лорда

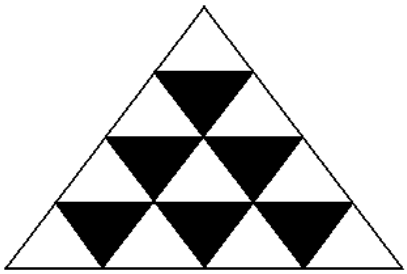
IRT з використанням трипараметричної моделі

1. К. Юрченко, В. Снитюк. Элементы адаптивной технологии оценивания знаний в режиме реального времени – InformationModelsodKnowledge. – Kiev-Sofia:ITHEA – 2010.

2. Овчинников В.В. Оценивание учебных достижений учащихся при проведении централизованного тестирования. – М.: Из-во Век книги, 2001. -27 С.

DYNAMICAL SYSTEMS MODELLING

AND STABILITY INVESTIGATION



MODELLING
&
STABILITY

Section 3

MODELLING AND INVESTIGATION OF MECHANICAL SYSTEMS

Dmytro Cherniy, Ph.D, Associate Professor, Department of Cybernetics
Taras Shevchenko National University of Kiev, Ukraine
Institute of Telecommunication & Global Information Space, Kiev, Ukraine
e-mail: D_Cherniy@ukr.net

ONE CASE OF THE ANALYTICAL SOLUTION OF THE NAVIER-STOKES EQUATION

Dmytro Cherniy

The problem of the unsteadyflow in a layeredviscous fluid streamof height *h* overa horizontal plane is considered. The main equations described this flow is Navier-Stokes equation

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V}\nabla)\vec{V} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \vec{F} + \frac{\mu}{\rho}\Delta\vec{V} \tag{1}$$

$$\nabla\vec{V} = 0\,, \tag{2}$$

with the following boundary condition in the top and bottom surface, accordingly.

$$\vec{V}(x,y,0,t) = \vec{V}_0(x,y,t)\,, \qquad \vec{V}(x,y,h,t) = \vec{V}_h(x,y,t)\,. \tag{3}$$

The equations (1) under mentioned before assumptions have a solution, which can be written in the integral form

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi(x,y,z,t) + \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial}{\partial x}\varphi(x,y,z,t)\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y}\varphi(x,y,z,t)\right)^2\right) + \frac{P(x,y,t)}{\rho} - \frac{\mu}{\rho}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\varphi(x,y,z,t) = q(z,t) \tag{4}$$

Using different approximation of convective terms in the steady flow, the different laws of motion of the boundaries and the contribution of various terms in (4), we get different types of the flows. As a result, we can obtain the classical solutions J. Poiseuille , M. Couette and H.S.Hele-Shaw. For the initial-boundary problem ofunsteadyvortexflows, when the convectivecomponentsare comparable tothe viscosity components, we can write the equation

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{\mu}{\rho}\frac{\partial^2\varphi}{\partial z} - \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2\right) - \frac{P}{\rho} + q(z,t) \tag{5}$$

with boundary conditions ($z = 0; h$):

$$(u,v)\big|_{z=0} = \nabla_{xy}\varphi(x,y,0,t) = (0,0)\,, \tag{7}$$

$$(u,v)\big|_{z=h} = \nabla_{xy}\varphi(x,y,h,t) = \vec{V}_h(x,y,t)\,, \tag{8}$$

and initial condition $t = 0$: $\qquad \varphi(x,y,z,0) = \Phi(x,y,z)\,,$ (9)

The solution of the hydrodynamic problem (for case *z* = *h*) is reduced to the mathematical problem for potential $\varphi = \varphi(x,y,h,t)$ in the multiply connected region D^+ with fixed impermeable L_{d} and moving L_{V} boundaries [1] (see for detail fig.1-2). The proposed method allows us to take into account the generation of moving vortex structures on the sharp edges of the border. The comparison with the actual results and the experimental results (see fig.3-4).

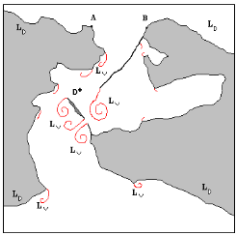


Fig.1. Scheme of the channel with complex geometry of boundaries

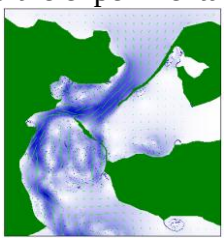


Fig.2.Mathematical modeling of flow in the Kerch Strait

Fig.3. Satellite photo of the flow in the Kerch Strait (11-12. 2007)

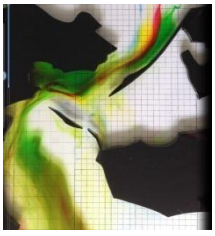


Fig.4. Experimental modeling of flow in the Kerch Strait

1.D.I.Cherniy, S.A.Dovgiy, V.V.Meleshko,*Proc.IUTAM Symposium "Vortex Dynamics: Formations, Structure and Function", Fukuoka, Japan 2013.*

2. D.I.Cherniy *Proc. XIV International Symposium "Discrete Singularities Methods in Mathematical Physics"* 185-187 (2009).

Maslov Boris Petrovich, Dr. Sci. (Phys.–Math.), Head Scientist
S.P. Timoshenko Institute of Mechanics NAS Ukraine, Kyiv, Ukraine,
e-mail: maslov@inmech.kiev.ua;
Klimuk Anatoliy Nikolaevich, Leading Engineer
Antonov DP, Kyiv, Ukraine;

COMPOSITES CREEP MODELING WITH FRACTIONAL CALCULUS

Maslov B.P., Klimuk A.N.

It is known that the addition of even a small volume fraction of carbon micro-fibres can enhance the long-term strength and stiffness of polymers [1]. Viscoelastic behavior of such a structure is not well investigated despite its significance under cyclic loading. Several methods may be used to predict the effective properties of viscoelastic composites [2,3]. The most common ones are based on the correspondence principle. Upon application of the Laplace-Carson transform, the boundary value problem for the local stress and strain fields in fibres and matrix becomes a linear elastic problem in the Laplace domain. Then the method proposed in [2] can be applied to construct the model of effective behavior of the composite. The effective creep compliances and relaxation functions in the physical time domain are obtained by an inverse Laplace transform. To simulate creep process we use Rabotnov type quasi-linear constitutive equation

$$(1+\rho^{\mu}\frac{d^{\mu}}{dt^{\mu}})e(t) = (1+\tau^{\mu}\frac{d^{\mu}}{dt^{\mu}})\frac{\partial U_e}{\partial s}(t), \qquad (1)$$

where ρ, μ, τ - rheological parameters, $0 < \mu < 1$, e, s - strain and Cauchy stress tensors, $U_e(s)$ - isotropic elastic transient potential, which is a scalar-valued tensor function of Cauchy's stress tensor, $e = \frac{\partial U}{\partial s}$, and t - time. So fractional derivatives are used here to identify material constants. The solution of (1) is obtained with Mittagg-Leffler function or heredity kernel which is given by the Rabotnov fractional-exponential function.

Firstly, the relationships between shear and dilatational creep and relaxation functions of isotropic linear viscoelastic materials under the multi-axial stress state are formulated. The constitutive equations of the three dimensional viscoelastic theory have been chosen in the form of the superposition of shear and dilatational components.

Secondly, effective relaxation and retardation functions of isotropic multi component composite material are written. The model suggested here (1) can describe composite nonlinear response more strictly than the one proposed earlier [2]. The matter is that the strain and rate strain are expressed as integrals of a nonlinear measure of the stress. It is more natural for creep process modeling. The nonlinear problem is investigated in second order approximation theory when the gradient deformation terms being higher than second order are neglected. Incremental approach in time and gradient deformation scales is used to determine stress concentration [3] on inclusion boundary in a case of nonlinear matrix creep. The overall retardation and stress concentration functions in the time domain are finally obtained by an inverse numerical Laplace transform. In examples considered the matrix material is chosen to be the cold setting epoxy polymer, and reinforcing material is glass or (and) carbon micro fibers. Influence of shape inclusion and volume concentration on composite viscoelastic behavior is illustrated. Some of the problems solved are experimentally approved.

1. *Lakes R.* Viscoelastic materials. - New York: Cambridge University Press, 2009. - 461 P.

2. *Maslov B.P.* Thermal-stress concentration near inclusions in viscoelastic random composites // Journal of Engineering Mathematics - 2008. - 61, No 8. - P. 339-355.

3. *Badulescu C., Lahellec N., Suquet P.* Field statistics in linear viscoelastic composites and polycrystals // European Journal of Mechanics A/Solids - 2015.- 49, No 2. - P. 329-344.

Onanko Yriy Anatoliyovich, post-graduate, geological department,
Taras Shevchenko Kyiv national university, Kyiv, Ukraine,
e-mail: onanko@univ.kiev.ua;
G.T. Prodayvoda Georgiy Trochimovich, Dr. Sci. (Phys.–Math.), Prof.,
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine,
e-mail: prod@univ.kiev.ua;
Onanko Anatoliy Petrovich, Ph. Dr. (Phys.–Math.), S.C.R.,
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine,
e-mail: onanko@univ.kiev.ua

AUTOMATED SYSTEM OF NUMERICAl ANALYSIS AND VISUALIZATION OF ANISOTROPY ULTRASONIC MEASURING DATA

OnankoY.A., ProdayvodaG.T, OnankoA.P.

Elastic constants C_{mn} change in wide limits. The algorithm principle scheme of calculation of elastic constants matrix C_{mn}, fluctuation component and verification of the meaningfulness hypothesis of rejection elastic constants C_{mn} from 0 $C_{mn} \neq 0$ is presented on fig. 1.

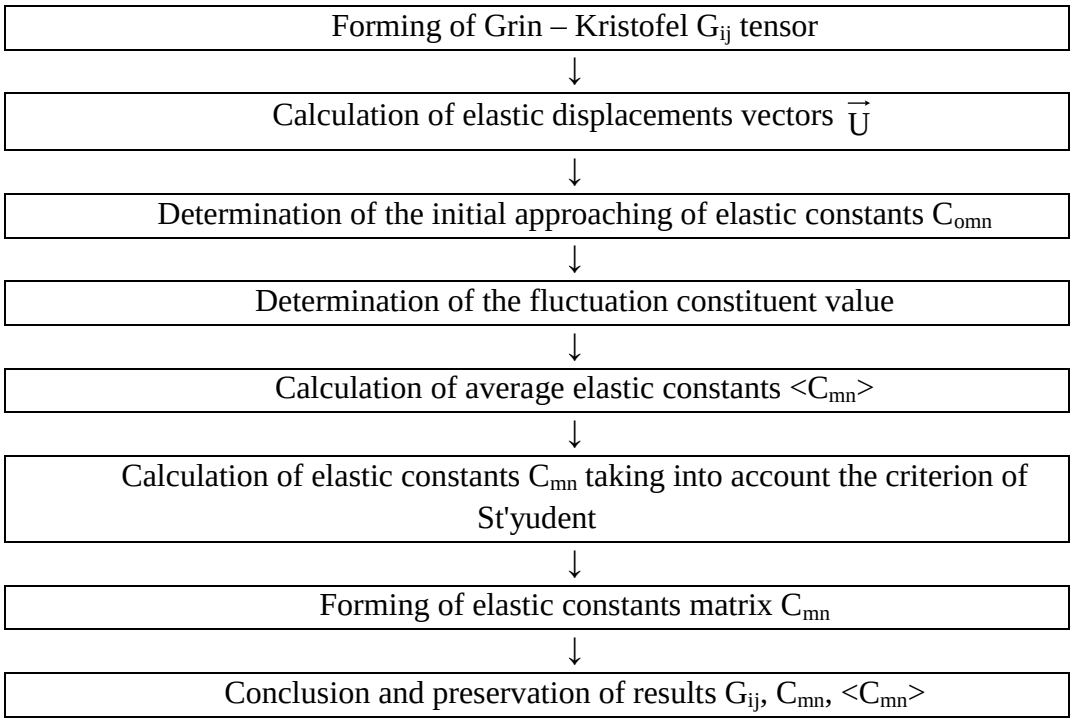


Fig. 1. The algorithm principle scheme of calculation of elastic constants matrix C_{mn}, fluctuation component and verification of the meaningfulness hypothesis of rejection elastic constants C_{mn} from 0.

The algorithm principle scheme of calculation of anisotropy parameters (azimuthal dependence of phase velocity V and module of radial velocity V_r, the rejection corner of elastic displacements vector $\vec{U}$ from the direction of wave normal $\varphi(\vec{U}, \vec{n})$; the differential coefficient of elastic anisotropy A_d) is presented [1].

Thus, at the analysis of configuration the program passes to the stage of forming of capable of working programmatic complex, going out from the present modules and parameters set. Programmatic algorithmic facilities of the automated system of numerical analysis and visualization of ultrasonic measuring data of anisotropy parameters of elastic waves velocities V, which provide the account of influence of heterogeneity of composition and textures structure are examined.

1. Onanko Y.A. Automated system of analysis of anisotropy measuring data in rocks / Y.A. Onanko // Geoinformatics. – 2013. - № 2(46). - P. 55-60.

Shyshkanova Ganna Anatolievna, Ph.D. (Phys.–Math.), Docent,
Zaporizhzhya National Technical University, Zaporizhzhya, Ukraine,
e-mail: shganna@mail.ru

STRENGTH CHARACTERISTICS OF ELASTIC SPACE WITH A DOUBLY-CONNECTED FLAT CRACK UNDER UNIAXIAL TENSION

Shyshkanova G.A.

The vibrations of a compressor disk or a turbine of a gas-turbine engine and blades often lead to the formation of close-to-circular cracks around the rim of the disk. This process can result in fracture. Besides, a lot of machinery parts operating at high temperatures are weakened by the special notches with various configurations, through which cooling air passes. The definition of the limit loads, the stress intensity factors is essential for investigation of the strength of design elements with cracks of arbitrary geometry.

A homogeneous unbounded elastic body with a doubly-connected flat macroscopic crack is in consideration. The opposite sides of the crack do not interact. The body is subjected to uniaxial tension perpendicular to the plane of the crack. The main integro-differential equation contains the simple layer potential.

$$p = \frac{E}{4\pi(1-\nu^2)}\Delta\iint\limits_S \frac{w(\rho,\theta)}{r}\mathrm{d}S\,,$$

where $w(\rho,\theta)$ is unknown function characterizing vertical displacements, Δ is Laplace operator, S is domain of the flat crack (or the notch of infinitesimal thickness).

The problem for circular ring crack has the solution [1], [2]. The problem for a non-circular ring crack is reduced to a sequence of similar problems for a circular ring crack using the algorithm [2]. This algorithm is based on expansion of the simple layer potential by small parameters that leads to the recurrent system.In asymmetric cases there is a need to obtain simple layer potential expansion when the density has no circular symmetry [3]. It is developed using the expansions in Legendre polynomials of the generating function. The potential expansion convergence is proved and is done at the bounds also.

The stress-deformed state of the body with flat doubly-connected crack are studied in cases when the cracks have geometry of Cassini ovals, close to rectangular and close to triangular contours, which haven't solved earlier. The functions of the vertical displacements and the normal stresses are found. The values of ultimate loads for the various configurations of the crack are obtained. Also the direction of the crack propagation is defined. Numerical examples are calculated. The computational results confirm the effectiveness of the proposed method, which can be used in the design of mechanical systems and machine parts for strength calculations.

1. Гринченко В.Г. Растяжение упругого пространства, ослабленного кольцевой трещиной / В.Г. Гринченко, А.Ф. Улитко // Прикладная механика. – 1995. – 1, Вып.10. – С. 61-64.

2. Шишканова С.Ф. О напряженном состоянии упругого пространства, ослабленного плоской трещиной, близкой к кольцевой / С.Ф. Шишканова // Прикладная механика. – 1990. – 26, №5. – С. 9-15.

3. Шишканова Г.А. Розв'язання двовимірного інтегрального рівняння зі слабкою особливістю для двозв'язних областей / Г.А. Шишканова, В.В. Мелешко // Прикладні проблеми мех. і мат. – 2007. –Вип. 5. – С. 178-185.

Авраменко Юлия Александровна, кандидат физ.-мат. наук,
Запорожская государственная инженерная академия, Запорожье, Украина,
e-mail: iuliavra@yandex.ru;
Авраменко Ольга Александровна, кандидат физ.-мат. наук,
Институт механики имени С.П. Тимошенко НАН Украины, Киев, Украина,
e-mail: avrolya@front.ru

АНАЛИЗ ВЛИЯНИЯ ПАРАМЕТРОВ ОРТОТРОПИИ НА НАПРЯЖЕННО ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ НЕТОНКИХ ТОРОИДАЛЬНЫХ ОБОЛОЧЕК

Авраменко Ю.А., Авраменко О.А.

Оболочки постоянной и переменной толщины широко применяются в различных отраслях современной техники как элементы конструкций и детали машин. С увеличением требований к современным конструкциям широкое применение получили оболочки сложных форм с переменными параметрами. К таким оболочкам относятся тороидальные оболочки переменной толщины. Исследование прочностных характеристик оболочек такого типа с применением классической теории может привести к значительным погрешностям. Это заставляет использовать для исследования напряженно-деформированного состояния таких конструкций уточненные модели теории оболочек, которые учитывают влияние поперечного сдвига. Одной из самых распространенных из них является модель, предложенная С.П. Тимошенко, которая базируется на гипотезе прямой линии.

Таким образом, для решения данного класса задач предлагается следующий подход: двумерная краевая задача для системы дифференциальных уравнений в частных производных, сводится к одномерной задаче методом сплайн-аппроксимации, после чего полученная в результате одномерная задача решается устойчивым численным методом дискретной ортогонализации [1].

С помощью указанной методики получены решения задач статики нетонких тороидальных оболочек переменной толщины под действием равномерно распределенной нагрузки и проведен анализ влияния параметров ортотропии на напряженно-деформированное состояние. Оболочка замкнута в поперечном сечении и жестко закреплена на торцах. Задача решалась при следующих исходных данных: толщина оболочки изменяется по закону $h(\theta)=h_0(1+\beta\cos 2\theta)$, $h_0=1{,}5$, S – длина дуги вдоль оси оболочки $0\le S\le L$, $L=60$, $r=15$, $\Delta\eta\cdot R=L$, $\Delta\eta=\pi/3;\pi/2;2\pi/3$ и $\beta=0{,}3$. Предполагалось, что модуль упругости $E_\eta=E=const$. Изменялись: модуль упругости $E_\theta=\mu E$, модуль сдвига $G_{\eta\theta}=\lambda E$, и коэффициент Пуассона υ_η.

Для модулей сдвига в поперечном направлении справедливы равенства $G_{\eta\gamma}=G_{\theta\gamma}=E/d$, $d=10$. При этом $\lambda, \mu, \upsilon_\eta$ принимают следующие значения [2]:1) $\mu=2$; $\lambda=0{,}3$; $\upsilon_\eta=0{,}075$;2) $\mu=1{,}35$; $\lambda=0{,}215$; $\upsilon_\eta=0{,}122$;3) $\mu=1$; $\lambda=0{,}385$; $\upsilon_\eta=0{,}3$; 4) $\mu=0{,}741$; $\lambda=0{,}159$; $\upsilon_\eta=0{,}165$;5) $\mu=0{,}5$; $\lambda=0{,}125$; $\upsilon_\eta=0{,}15$.

Третий вариант значений упругих постоянных соответствует изотропному случаю, когда $E_\eta=E_\theta$ и $\upsilon_\eta=\upsilon_\theta$.

1. Григоренко Я.М., Влайков Г.Г., Григоренко А.Я. Численно-аналитическое решение задач механики оболочек на основе различных моделей. – Киев: Академпериодика, 2006. – 472с.

2. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела / С.Г. Лехницкий –М.: Наука, 1977. – 416 с.

Афанасов Евгений Николаевич, инженер,
ФГУП «Крыловский государственный научный центр», Санкт–Петербург, Россия,
e-mail: zhenya.afanasov@yandex.ru
Кадыров Сергей Газимурович, к.т.н., профессор,
Санкт–Петербургский государственный морской технический университет,
Санкт–Петербург, Россия,
e-mail: skadyrov@gmail.com

МАЛЫЕ КОЛЕБАНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА В ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Афанасов Е.Н., Кадыров С.Г.

Известно, что при описании малых по амплитуде движениях твердого тела в вязкой несжимаемой жидкости уравнения Навье – Стокса можно линеаризировать [1].

В работе рассмотрен метод решения уравнений такой модели в случае плоской и осесимметричной задач о малых гармонических во времени колебаниях твердого тела в вязкой несжимаемой жидкости.

Показано, что задачи можно сформулировать в виде уравнений для завихренности, составляющих вектора скорости и давления.

Уравнения для завихренности и скоростей образуют замкнутую систему, которую приходится решать методом последовательных приближений, поскольку граничное условие для завихренности на контуре тела отсутствует.

Если завихренность определена, то можно найти давление. При решении уравнения для давления на контуре твердого тела ставится условие второго рода – граничное условие Неймана, которое можно определить, дифференцируя и комбинирую линеаризованные уравнения Навье-Стокса.

При построении численного (разностного) метода применен переход к новым независимым переменным – потенциалу и функции тока в теории идеальной жидкостью [2]. В таких координатах область решения представляет собой внешность отрезка, что облегчает построение разностной схемы аппроксимирующей поставленную краевую задачу.

В качестве модельных задач рассматриваются задачи о малых гармонических колебаниях цилиндра кругового и эллиптического сечения и сферы, погруженных в вязкую несжимаемую жидкость. Результаты расчетов сравниваются с известными точными теоретическими решениями [1, 3] и с результатами, полученными при решении этих задач методом граничных интегральных уравнений [4].

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т.VI. Гидродинамика. Изд-е 5-е, стереот. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. 736 с.
2. Кадыров С.Г., Афанасов Е.Н., «Новая модель «ползущих» течений вязкой несжимаемой жидкости», стр. 127/ Моделирование, управление и устойчивость (MCS-2012): межд. конф.; Севастополь, 10-14 сентября 2012 г./ отв. ред. О.В. Анашкин; Таврический нац. ун-т имени В.И. Вернадского. – Симферополь: ДИАЙПИ, 2012. 201 с.
3. Гузь А.Н. Динамика сжимаемой вязкой жидкости. Киев: А.С.К., 1998. 350 с.
4. Кадыров С.Г. Метод граничных интегральных уравнений в задаче о малых колебаниях тел в сжимаемой вязкой жидкости, Морской Вестник, Спец. вып. №1 (10), 2013, с. 85 – 87.

Бабич Дмитрий Васильевич, д-р техн. наук,
Институт механики им. С.П. Тимошенко НАНУ, Киев,Украина.
e-mail: Babich_dv@ukr.net
Безверхий Александр Игоревич, доктор физ.-мат. наук, профессор,
Институт механики им. С.П. Тимошенко НАНУ, Киев,Украина.
Дородных Татьяна Ивановна**,** канд. физ.-мат. наук,
Институт механики им. С.П. Тимошенко НАНУ, Киев,Украина.
e-mail: domval@ukr.net

О ДОЛГОВЕЧНОСТИ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ

Бабич Д.В., Безверхий А.И., Дородных Т.И.

Работа посвящена развитию структурно-вероятностного подхода к определению долговечности и остаточной прочности при наработке пьезокерамических изделий при электроупругом нагружении. В основу предлагаемого подхода положена статистическая интерпретация критерия Мизеса-Хилла [1] в мерах повреждённости и модель накопления микроповреждений в трансверсально-изотропном материале при циклическом нагружении, в совокупности определяющих усталостное разрушение тела. Критерием начала усталостного разрушения считается достижение плотностью микродефектов в циклически нагружаемых телах критических значений, отождествляемых с плотностями микродефектов, образующихся при статическом разрушении вследствие чистого растяжения, сжатия либо сдвига.

Долговечность пьезокерамических конструкций рассматривается на примере задачи о долговечности пьезокерамических стержней при продольных колебаниях, возбуждаемых переменной во времени разностью потенциалов, прикладываемых на торцевых гранях стержня. Отметим, что механические напряжения вторичного пьезоэффекта устанавливаются практически мгновенно, следствием чего является и мгновенное появление микротрещин в бесконечно малых структурных элементах пьезокерамики. При решении этой задачи предварительно решалась задача о напряженно-деформируемом состоянии с учетом трещиноватости трансверсально-изотропного пьезоматериала на основе обобщенного энергетического метода [2]. Усталостное разрушение пьезокерамического стержня при циклическом электрическом нагружении наступит при N-том растяжении, когда прогрессирующая концентрация микротрещин достигнет критического значения $\varepsilon_{1(N)} = \varepsilon_{1cr}$, определяемого соотношением

$$\varepsilon_{1cr} = \varepsilon_{1(N-1)} + (1-\varepsilon_{1cr})^{1-\alpha_1}\left(\frac{\bar{\sigma}_{33(N-1)}}{\sigma_{m1}}\right)^{\alpha_1}, \qquad (1)$$

где σ_{m1}, – максимальное значения пределов прочности структурных элементов отрыва при растяжении, α_1 – соответствующий коэффициент рассеивания отрывной микропрочности. $\bar{\sigma}_{33(N-1)}$ –амплитудное значение напряжения, устанавливающихся вследствие предшествующего растяжения стержня.

Указанным количеством растяжений характеризуется долговечность стержня. В работе приводятся приближенные способы определения долговечности N, а также определяется остаточный предел прочности материала после n – кратного нагружения, и условный предел выносливости. Приводятся численные результаты для конкретного примера.

1. Бабич Д.В. Статистический критерий прочности для хрупких материалов. /Д.В. Бабич // Проблемы прочности. – 2011., №5. – С. 123-137.

2. Бабич Д.В., Безверхий А.И., Дородных Т.И. Континуальная модель деформирования трещиноватых электроупругих материалов. / Д.В. Бабич, А.И. Безверхий, Т.И. Дородных // Математичні проблеми технічної механіки – 2014: міжнародна наукова конференція, квітень 14-17, 2014, Дніпропетровськ, Дніпродзержинськ – 2014, с. 53-55.

Бернакевич Ірина Євстахіївна, кандидат фіз.-мат. наук, доцент,
ЛНУ імені Івана Франка, Львів, Україна,
e-mail:ibernyk@franko.lviv.ua;
Вагін Петро Петрович, кандидат фіз.-мат. наук, доцент,
ЛНУ імені Івана Франка, Львів, Україна,
e-mail: vahin@franko.lviv.ua;
ШотІринаЯрославівна, аспірант,
ЛНУіменіІванаФранка, Львів, Україна,
e-mail: ira_shot@yahoo.com

АНАЛІЗ СТІЙКОСТІ ОБОЛОНОК, ПОДАТЛИВИХ ДО ЗСУВУ ТА СТИСНЕННЯ

Бернакевич І.Є., Вагін П.П., Шот І.Я.

Розробка універсальних, теоретично обґрунтованих методів, алгоритмів і програм розрахунку на стійкість тонкостінних оболонкових конструкцій під дією статичного або динамічного навантаження, що вимагає використання нелінійної теорії оболонок, дозволяє надійніше прогнозувати і покращувати міцнісні та експлуатаційні властивості гнучких конструкцій.

З використанням співвідношень геометрично нелінійної теорії тонких оболонок, податливих до зсуву та стиснення (шестимодальний варіант), записано ключові рівняння для визначення методом скінченних елементів початкового післякритичного стану, а також власних частот вільних коливань розглядуваних оболонок. Особливість математичної моделі полягає у напівдискретизації на основі кінематичних гіпотез Тимошенка – Міндліна вектора переміщень пружного тіла за змінною товщини зі збереженням повного вектора поворотів нормалі серединної поверхні.

Сформульовано задачу стійкості оболонок, податливих до зсуву та стиснення, а також відповідну варіаційну задачу [1]. Доведено теорему про неперервність та симетричність форм цієї варіаційної задачі. Записано співвідношення для знаходження власних частот вільних коливань розглядуваних оболонок.

Побудовано числові схеми методу скінченних елементів з використанням біквадратичних ізопараметричних апроксимацій для розв’язування задач стійкості, коливань та лінійного і нелінійного деформування оболонок, податливих до зсуву та стиснення. Розв’язування лінійної задачі статики здійснюється за допомогою апроксимацій Гальоркіна. В основу побудови схем числового розв’язування нелінійних задач покладена ідея квазілінеаризації варіаційних постановок розглядуваних задач на основі методу Ньютона за переміщеннями при постійному заданому зовнішньому навантаженні. Розв’язування задач стійкості та коливань зводиться до так званої узагальненої проблеми на власні значення і здійснюється за допомогою методу обернених ітерацій.

Схеми розв’язку задач дослідження стійкості та динамічної поведінки, зокрема вільних коливань, а також нелінійного деформування оболонок складної геометрії методом скінченних елементів, реалізовано у вигляді проблемно-орієнтованого комплексу програм.

Наведено розв’язки задач про дослідження стійкості круглої пластинки та зрізаного конуса, вільні коливання циліндричних оболонок, нелінійне деформування катеноїда та пластини-смуги, а також дослідження напружено-деформованого стану циліндричної оболонки в процесі її лінійного деформування.

1. Bernakevych I.E. A study of the stable equilibrium of thin shells compliant to shear and compression / I.E. Bernakevych, P.P. Vahin, I.Ya. Shot // Journal of Mathematical Sciences. – 2012. – 181, № 4. – P. 497–505.

Д. В. Георгиевский.
Московский Государственный Университет им. М.В.Ломоносова, механико-математический факультет, кафедра механики композитов
georgiev@mech.math.msu.su, cotedurhone@mail.ru

ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ СОВМЕСТНОСТИ В НАПРЯЖЕНИЯХ В R^n

Д.В. Георгиевский

Путём приравнивания нулю всех компонент тензора несовместности Крёнера ранга $2n-4$ либо дуального к нему тензора Римана $R^{\{4\}}(\underset{\sim}{\varepsilon}(x))$ выводятся $n^2(n^2-1)/12$ независимых уравнений совместности в напряжениях в n-мерной изотропной упругой среде:

$$2R_{rmst}(\underset{\sim}{\varepsilon}(\underset{\sim}{\sigma}(x))) = \sigma_{rs,mt} + \sigma_{mt,rs} - \sigma_{ms,rt} - \sigma_{rt,ms} + \frac{\nu}{1+\nu}(\Theta_{,rt}\delta_{ms} + \Theta_{,ms}\delta_{rt} - \Theta_{,mt}\delta_{rs} - \Theta_{,rs}\delta_{mt}) = 0, \quad (1)$$

где запятая в индексе означает частное дифференцирование по соответствующей координате, ν - коэффициент Пуассона, присутствующий в обратном законе Гука

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{E}(-\nu\Theta\delta_{ij} + (1+\nu)\sigma_{ij}), \quad \Theta = \sigma_{kk}. \quad (2)$$

По повторяющимся два раза индексам ведётся суммирование от 1 до n.

Исследуется вопрос [1 - 5] об эквивалентности системы (1) другим известным в теории упругости системам уравнений совместности в напряжениях, следующим только из равенства нулю всех $n(n+1)/2$ компонент тензора Риччи:

$$\Delta\sigma_{ms} + \frac{1+(3-n)\nu}{1+\nu}\Theta_{,ms} - \frac{\nu}{1+\nu}\Delta\Theta\delta_{ms} - \sigma_{mr,rs} - \sigma_{sr,rm} = 0 \quad (3)$$

либо только одного инварианта кривизны:

$$\Delta\Theta = \frac{1+\nu}{1+(2-n)\nu}\sigma_{mr,mr}. \quad (4)$$

Показывается, что ответ на этот вопрос зависит от размерности пространства. Выделяются три случая: $n=2$ (плоская задача теории упругости), $n=3$ (пространственная задача теории упругости) и $n \geq 4$.

1. *Победря Б.Е.* Лекции по тензорному анализу. М.: Изд-во МГУ, 1986. 263 с.

2. *Бородачёв Н.М.* Решения пространственной задачи теории упругости в напряжениях // Прикл. механика. - 2006. - 42, № 8. - С. 3-35.

3. *Pobedrya B.E., Georgievskii D.V.* Equivalence of formulations for problems in elasticity theory in terms of stresses // Russ. J. Math. Phys. - 2006. - 13, № 2. - P. 203-209.

4. *Georgievskii D.V., Shamolin M.V.* Levi-Civita symbols, generalized vector products, and new integrable cases in mechanics of multidimensional bodies // J. Math. Sci. - 2012. - 187, № 3. - P. 280-299.

5. *Георгиевский Д.В.* Общие решения не эквивалентных классической систем теории упругости в напряжениях // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика. Механика. - 2012. - № 6. -С. 26-32.

Глухов Юрій Петрович, кандидат фіз.-мат. наук, доцент
Інститут механіки імені С.П. Тимошенка НАН України, Київ, Україна,
e-mail: gluchov.uriy@gmail.com;
Галаган Алла Іванівна, старший викладач,
Кременчуцький національний університет іменіМ. Остроградского, Кременчук, Україна,
e-mail: golegg@mail.ru

РІВНЯННЯ РУХУ ПЛАСТИНИ ПРИ ПОВЕРХНЕВОМУ НАВАНТАЖЕННІ

Глухов Ю.П., Галаган А.І.

При моделюванні руху пружного шару рівняннями теорії пластин важливим є вибір рівнянь руху пластини, які в достатній мірі відображають основні властивості об'єкта, і формулювання граничних умов в будь-якій точці середовища в будь-який момент часу. Виходячи з цього доцільно використовувати теорію пластин, яка враховує деформації зсуву та інерцію обертання [1]. Відповідно до основних положень теорії, викладених в роботі [1], нижче приведені в декартовій системі координат тривимірні рівняння руху пластини з врахуванням зсуву та інерції обертання при довільному поверхневому навантаженні

$$\frac{D}{2}\left[(1-\nu)\nabla^2\Psi_x+(1+\nu)\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right]+h\tau_x-\mu' h\left(\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial x}+\Psi_x\right)=\frac{2\rho h^3}{3}\frac{\partial^2\Psi_x}{\partial t^2};$$

$$\frac{D}{2}\left[(1-\nu)\nabla^2\Psi_y+(1+\nu)\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right]+h\tau_y-\mu' h\left(\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial y}+\Psi_y\right)=\frac{2\rho h^3}{3}\frac{\partial^2\Psi_y}{\partial t^2};$$

$$\mu' h\left(\nabla^2 \mathrm{w}+\Phi\right)+q=2h\rho\frac{\partial^2 \mathrm{w}}{\partial t^2}.$$

Тут

$$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial \mathrm{x}^2}+\frac{\partial^2}{\partial \mathrm{y}^2};$$

$$\Phi=\frac{\partial \Psi_{\mathrm{x}}}{\partial \mathrm{x}}+\frac{\partial \Psi_{\mathrm{y}}}{\partial \mathrm{y}};$$

$$\mathrm{D}=\frac{4\mu \mathrm{h}^3}{3(1-\nu)};\quad \mu'=\kappa\mu;$$

$2h$ - товщина пластини; ρ - густина матеріалу пластини; μ - модуль зсуву; ν - коефіцієнт Пуасона; κ - коефіцієнт зсуву Тимошенка; $\Psi_x(x,y,t)$, і $\Psi_y(x,y,t)$ - повороти відносно осей x і y; $\mathrm{w}(x,y,t)$ - переміщення середньої площини пластини; $\tau_x(x,y,t)$, $\tau_y(x,y,t)$, $q(x,y,t)$ - дотичні та нормальні поверхневі навантаження.

Члени рівнянь, що містять параметр μ', характеризують поперечний зсув, а члени, що містять вирази $\frac{2\rho h^3}{3}\frac{\partial^2\Psi_x}{\partial t^2}$ та $\frac{2\rho h^3}{3}\frac{\partial^2\Psi_y}{\partial t^2}$, - вплив інерції обертання.

1. Mindlin R.D. Influence of Rotatory Inertia and Shear on Flexural Motions of Isotropic, Elastic Plates// Trans.ASME. Ser.E.J.Appl.Mech. – 1951.- 18, № 1. – P.31 – 38.

Гололобов Владимир Ильич, канд. техн. наук, ст. науч. сотр.,
Институтмеханикиим. С. П. ТимошенкоНАНУ, Киев, Украина,
e-mail: term@inmech.kiev.ua

ХАРАКТЕРИСТИКИ МНОГОЭЛЕКТРОДНЫХ ПЬЕЗОЭЛЕМЕНТОВ ПРИ ГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЯХ

ГололобовВ. И.

В радиоэлектронике и электроакустике при обработке низкочастотных сигналов используются электроупругие элементы из пьезокерамики [1].Анализ работы приборов и устройств с такими элементами проводится на основе предварительного определения характеристик твердотельных деформируемых составляющих – их реакций на произвольное внешнее электрическое воздействие [2]. Эти характеристики или определяющие соотношения для элемента с p полюсами в режиме гармонических колебаний представляют p линейных соотношений, связывающих такое же количество независимых воздействий и реакций виде токов или напряжений на соединительных проводниках - полюсах. Коэффициенты в каждом соотношении определяются на основе решения задачи электроупругости, соответствующей одному из независимых воздействий.

Предлагается методика прямого получения характеристик многополюсника с использованием метода конечних элементов в вариационной формулировке [3]. Узловыми неизвестными принимаются компоненты вектора перемещения и электрического потенциала. Так как на каждом электроде во всех узлах потенциал принимает одинаковое значение, матрица разрешающей системы линейных алгебраических уравнений относительно глобального вектора неизвестных теряет ленточную структуру.

Перенумерация компонентов глобального вектора с целью расположения блока потенциалов полюсов в конце вектора приводит матрицу к блочному виду с основным блоком ленточной формы.

Правая часть матрицы, представляющая воздействия известных токов в соединительных проводниках, записывается дляуравнений из блока потенциалов полюсов с точностью до параметров в виде столбцов единичной матрицы.

Обращение ленточной подматрицы позволяет исключить из системы уравнений все неизвестные, соответствующие этому блоку. Оставшиеся p уравнений для потенциалов электродов представляют определяющие соотношения для многополюсника.

1. Ерофеев А. А., Данов Г. А., Фролов В. Н. Пьзокерамические трансформаторы и их применение в радиоэлектронике. –М.: Радио и связь, 1988. -128 с.

2. Сиберт У. М. Цепи, сигналы, системы: В 2-х ч. Ч. 1: Пер. с англ. — М.: Мир, 1988. — 336 с.

3. Шульга Н. А., Болкисев А. М. Колебания пьезоэлектрических тел. – К.: Наукова думка, 1990. – 228 с.

Григоренко Александр Ярославович, доктор физ.-мат. наук, профессор
Институт механики им. С.П.Тимошенко НАН Украины, Киев, Украина
Ефимова Татьяна Леонидовна, кандидат физ.-мат. наук,
Институт механики им. С.П.Тимошенко НАН Украины, Киев, Украина
Коротких Юлия Анатольевна
Киевский Национальный университет строительства и архитектуры, Киев, Украина
e-mail: Tolikovna@bigmir.net

СВОБОДНЫЕ ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ НЕТОНКИХ ЦИЛИНДРОВ ИЗ НЕПРЕРЫВНО НЕОДНОРОДНЫХ МАТЕРИАЛОВ С НЕСИММЕТРИЧНОЙ СТРУКТУРОЙ ОТНОСИТЕЛЬНО СРЕДИННОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Григоренко А.Я,. Ефимова Т.Л,. Коротких Ю.А.

В последнее время активно развивается теория функционально-градиентных материалов (ФГМ), концентрирующая внимание исследователей на искусственно созданных неоднородных композиционных материалах с плавно изменяющимися в заданном направлении физическими свойствами, без каких-либо переходных слоев и границ раздела. ФГМ находят все большее применение в машиностроении, радиопромышленности, приборостроении, медицине. Большой практический интерес имеет изучение динамического поведения конструктивных элементов из ФГМ различных геометрических форм, в том числе и цилиндров конечной длины. Отметим, что одним из важных аспектов обеспечения эффективных режимов эксплуатации отмеченных упругих тел является получение информации о характеристиках их свободных колебаний. Повышенные требования, предъявляемые к оценкам прочностных свойств, стремление к более полному учету реальных свойств материалов, выявление и изучение трехмерных эффектов, имеющих место в толстостенных элементах, приводят к необходимости проводить расчет динамических характеристик тел из ФГМ в пространственной постановке.

Большое значение имеет разработка и использование эффективных подходов к решению задач, посвященных определению динамических характеристик полых цилиндров конечной длины в пространственной постановке с непрерывной неоднородностью упругих свойств. В данном сообщении для решения указанного класса задач предлагается эффективный численно-аналитический подход к исследованию собственных частот и форм осесимметричных колебаний полых неоднородных цилиндров конечной длины при различных граничных условиях на торцах цилиндра, который базируется на применении сплайн-аппроксимации в одном из координатных направлений с последующим решением краевой задачи на собственные значения для систем обыкновенных дифференциальных уравнений высокого порядка с переменными коэффициентами устойчивым численным методом дискретной ортогонализации в сочетании с методом пошагового поиска.

На основании предложенного подхода были проведены расчеты частот свободных колебаний полого цилиндра из функционально-градиентного материала типа «металл-металл», являющегося композицией нержавеющей стали и никеля, упругие свойства которого меняются непрерывно в радиальном направлении, для различных значений температур и геометрических параметров. Рассматривались граничные условия двух типов: шарнирное опирание и жесткое защемление торцов оболочки.

Предлагаемая методика позволяет производить расчеты частот свободных колебаний полых цилиндров конечной длины в пространственной постановке с непрерывной в радиальном направлении неоднородностью упругих свойств.

Дашко Ольга Геннадьевна, кандидат физ.-мат. наук, научный сотрудник,
Институт механики имени С.П. Тимошенко, Киев, Украина,
e-mail: olga.dashko@gmail.com

РАСТЯЖЕНИЕ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНЫ ПРИ СМЕШАННЫХ УСЛОВИЯХ НА ГРАНИЧНЫХ ПЛОСКОСТЯХ

Дашко О.Г.

В данной работе рассматривается задача о равновесии трансверсально-изотропной пластины постоянной толщины $2h$ $(h=const)$, на граничных плоскостях которой касательные смещения и нормальное напряжение равны нулю. Для решения задачи применяется разработанный в [1, 2] метод, в основание которого положено разложение искомых функций в ряды Фурье по полиномам Лежандра от координаты толщины. Деформирование пластины предполагается симметричным, вследствие чего компоненты вектора перемещений $u_j\left(x_1,x_2,x_3\right)$ представляем в виде

$$u_\alpha=\sum_{k=0}^{n}u_\alpha^{(2k)}\left(x\right)\left[P_{2k}\left(\xi\right)-P_{2k+2}\left(\xi\right)\right]\left(\alpha=1,2\right);\quad u_3=\sum_{k=0}^{n}u_3^{(2k+1)}\left(x\right)P_{2k+1}\left(\xi\right),\qquad(1)$$

где $x=(x_1,x_2)$, $\xi=h^{-1}x_3$. Получена система дифференциальных уравнений для коэффициентов разложения $u_\alpha^{(2k)}\left(x\right)$, $u_3^{(2k+1)}\left(x\right)$, которая в комплексной форме имеет вид

$$c_{66}\Delta u_+^{(2k)}+2(c_{12}+c_{66})\partial_{\bar z}e^{(2k)}+h^{-1}\sum_{s=0}^{n}\alpha_{2s+1}^{(k)}\left[2\left(c_{13}+c_{44}\right)\partial_{\bar z}u_3^{(2s+1)}-\left(4s+3\right)c_{44}h^{-1}u_+^{(2s)}\right]=0;$$

$$c_{44}\Delta u_3^{(2k+1)}-\left(4k+3\right)h^{-1}\left[\left(c_{13}+c_{44}\right)e^{(2k)}+c_{33}h^{-1}\sum_{s=0}^{n}\alpha_{2s+1}^{(k)}u_3^{(2s+1)}\right]=0\ \left(k=\overline{0,n}\right)\qquad(2)$$

где $\Delta=4\partial_z\partial_{\bar z}$, $u_+^{(2k)}=u_1^{(2k)}+iu_2^{(2k)}$, $e^{(2k)}=\partial_z u_+^{(2k)}+\partial_{\bar z}\bar u_+^{(2k)}$, $2\partial_{\bar z}=\partial/\partial x_1+i\,\partial/\partial x_2$ c_{ij} – упругие постоянные, $\alpha_{2s+1}^{(k)}$ – абсолютные константы вида

$$\alpha_{2s+1}^{(k)}=\begin{cases}\left(s+1\right)\left(2s+1\right), 1\le s\le k,\\ \left(k+1\right)\left(2k+1\right), k\le s\le n\end{cases}\qquad(3)$$

Общее аналитическое решение системы имеет вид

$$c_{66}u_+^{(2k)}=h\sum_{m=1}^{2(n+1)}a_m^{(2k)}\partial_{\bar z}V_m+ih\sum_{s=1}^{n+1}b_s^{(2k)}\partial_{\bar z}W_s;\quad c_{66}u_3^{(2k+1)}=\sum_{m=1}^{2(n+1)}c_m^{(2k+1)}V_m\ \left(k=\overline{0,n}\right),\qquad(4)$$

где $a_m^{(2k)}$, $b_s^{(2k)}$, $c_m^{(2k+1)}$ – безразмерные константы, V_m W_s – метагармонические функции, удовлетворяющие уравнениям Гельмгольца..

1. Векуа И.Н. Теория тонких пологих оболочек переменной толщины // Тр. Тбилис. мат. ин-та, 1965. – Т. 30. – С. 3-103.

2. Khoma I.Yu. Representation of the solution of the equilibrium equations for non-thin transversely isotropic plates // J. of Math. Sciences. – 2000. – 101, № 6. – P.3577–3584.

Довжик Михаил Викторович, кандидат физ.-мат. наук,
Институт механики им. С.П. Тимошенко, Киев, Украина,
e-mail: medved_mik@ukr.net;
Назаренко Владимир Михайлович, доктор технических наук, профессор,
Институт механики им. С.П. Тимошенко, Киев, Украина,
e-mail: nazvm1@gmail.com

РАЗРУШЕНИЕ КОМПОЗИТНОГО МАТЕРИАЛА ПРИ РАВНОМЕРНОМ СЖАТИИ ВДОЛЬ ПРИПОВЕРХНОСТНОЙ ДИСКООБРАЗНОЙ ТРЕЩИНЫ

Довжик М.В, Назаренко В.М.

Работа посвящена исследованию задачи про разрушение композитного материала с приповерхностной дискообразной трещиной, при сжатии вдоль плоскости трещины в осесимметричной постановке. В случае тела с макротрещиной, когда размеры трещины значительно больше размеров микроструктур композит рассматривается в виде анизотропной среды с наведенными макрохарактеристиками [1]. В этом случае задача сводится к решению системы интегральных уравнений Фредгольма с дополнительным условием.

Система интегральных уравнений решена используя численно аналитическая методику предложенную в [2], что позволило существенно повысить точность вычислений и получить результаты для очень малых расстояний между трещиной и свободной поверхностью. В качестве примера проведено исследование композита с приведенными характеристиками трансверсально-изотропной среды, для которого получены критические параметры разрушения для больших и малых значений относительных расстояний между трещинами. Анализ полученных результатов позволил определить критерии применения приближенных расчетных схем [3] для решения таких задач как с точки зрения тонкостенности, так и с точки зрения условий закрепления.

1. Гузь А.Н. Механика разрушения материалов при сжатии вдоль трещин (обзор). Конструкционные материалы / Гузь А.Н., Назаренко В.М. // Прикл. механика. – 1989 – 25, №10. – С 3–19.

2. Довжик М. В. Разрушение полупространства при сжатии вдоль приповерхностной дискообразной трещины для малых расстояний между свободной поверхностью и трещиной / М. В. Довжик // Прикл. механика. – 2012. – Т. 48, № 3. – С. 79–88.

3. Obreimoff I.W. The splitting strength of mica / Obreimoff I.W. // Proc. Roy. Soc. of London. – 1930. – 127 A. – P. 290–297.

Доник Василий Дмитриевич, кандидат технических наук,
Государственное предприятие «АНТОНОВ»,
e-mail: Vasiliy.D.Donik@gmail.com

МОДЕЛИРОВАНИЕ И ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ В ОТСЕКЕ ПРИ ВНЕЗАПНОЙ РАЗГЕРМЕТИЗАЦИИ ЧЕРЕЗ ОТВЕРСТИЕ ТИПА «ПРОБКА» ИЛИ «ЩЕЛЬ»

Доник В.Д.

За основу использована математическая модель в соответствии с работой /1/. В самом общем виде математическая модель изменения давления (Р), температуры (Т) воздуха в отсеке имела вид

$$\frac{d^2P}{d\tau^2} = f_1(n,P,V,T,G_1,G_2,\frac{dP}{d\tau},\frac{dV}{d\tau},\frac{dT}{d\tau},\frac{dG_1}{d\tau},\frac{dG_2}{d\tau},\frac{dq}{d\tau},\frac{dl}{d\tau},\frac{d^2V}{d\tau^2},\frac{d^2q}{d\tau^2},\frac{d^2l}{d\tau^2}),$$

$$\frac{dT}{d\tau} = f_2(n,P,T,\frac{dP}{d\tau}),\ G = f_3(n,P_0,P,T_0,F,A)$$

Проведены исследования математической модели при постоянном ($n = const$) и переменном ($n = \mathrm{var}$) показателе политропы, при постоянном $\left(p/\rho^n = A = const\right)$ и переменном $\left(P/\rho^n = A = \mathrm{var}\right)$ значении уравнения политропы.

Для отверстия типа «пробка» получена максимальная погрешность результатов расчета давления воздуха в отсеке в области низких давлений и составила 6,2%,, а в области высоких давлений – 3,5%. Сравнительный анализ результатов расчета и эксперимента показывает, что разработанная математическая модель описывает изменение давления воздуха в отсеке со средней погрешностью 5,1% во всем интервале времени. Показатель политропы составил $n = 1{,}29$.

Для отверстия типа «щель» проведены исследования для двух вариантов изменения уравнения политропы. При постоянном уравнении политропы математическая модель имеет максимальные погрешности 24,6% в области переходного процесса. Математическая модель не позволяет определять параметры воздуха при изменении направления скорости давления воздуха. Значительные отклонения результатов расчета имеют место при скорости свыше 2972 кПа/с. Для таких изменений параметров воздуха происходит существенное смещение результатов расчета, что особенно отражается на значении показателя политропы и характера изменения давления воздуха в отсеке. При переменном значении уравнения политропы с помощью математической модели представляется возможным описать области различных изломов и перегибов функции зависимости изменения давления воздуха в отсеке во времени. Максимальное значение погрешности в этой области достигает значений 4,4%. Предпочтительный показатель политропы составил $n = 1{,}46$.

Проведено сопоставление результатов расчета в соответствии с разработанной моделью, известной моделью Ивлентиева В.С и экспериментом. Разработанная модель имеет предпочтительные оценки и отражает характер протекаемого процесса.

1. *Доник В.Д.* Исследование волновых процессов в отсеке// Материалы Межд. конф. по моделированию и устойч. динамич. систем (DSMSI-2009). – К.: -КНУ им. Т.Шевченка, 2009. – С.136.

Дудик Михайло Володимирович, кандидат фіз.-мат. наук, доцент
Уманський державнийпедагогічний університет, Умань, Україна
e-mail: dudik_m@hotmail.com
Кіпніс Леонід Абрамович, докторфіз.-мат.наук, професор
Уманський державнийпедагогічний університет, Умань, Україна
Дякон Валерій Миколайович, кандидат фіз.-мат. наук, доцент
Уманський відокремлений підрозділ Європейського університету
e-mail: valera_dok@pochta.ru

ПРО КОМПЛЕКСНУ МОДЕЛЬ МІЖФАЗНОЇ ТРІЩИНИ З МАЛОМАСШТАБНИМ КОНТАКТОМ БЕРЕГІВ

Дудик М.В., Кіпніс Л.А., Дякон В.М.

У кусково-однорідному тілі, що складається з двох крихких матеріалів, при наявності на межі поділу матеріалів міжфазної тріщини біля її вершини передбачається утворення зони передруйнування, в якій переважають відривні деформації. В безпосередньому околі вершини через більш високий рівень напружень суттєво зростає також і рівень відносних деформацій, внаслідок чого в області зони передруйнування, прилеглій до вершини тріщини, виникає досить мала зона деструкції, в якій матеріал зазнає не лише значних відривних, але і зсувних деформацій. Додатковою обставиною, що впливає на напружено-деформований стан біля вершини тріщини, є можливий контакт її берегів. Комплексна модель міжфазної тріщини [1] враховує наявність всіх вище вказаних факторів.

Деталі тонкої структури вершини міжфазної тріщини в рамках комплексної моделі залежать від співвідношення розмірів області контакту берегів та зони передруйнування, які, в свою чергу, визначаються величиною і конфігурацією зовнішнього навантаження. При переважанні розтягувальних зусиль у зовнішньому навантаженні кусково-однорідного тіла з плоскою межею поділу матеріалів біля вершин міжфазної тріщини модель передбачається утворення області контакту берегів дуже малих розмірів. Аналогічна ситуація з малою протяжністю області контакту берегів, але лише біля однієї з вершин, виникає і при дії зсувних навантажень. Тому при збільшенні навантаження зона передруйнування може значно перевищити за розмірами контактну зону. У такому випадку очікується наступна тонка структура вершини міжфазної тріщини: в околі вершини у менш тріщиностійкому матеріалі утворюється вузька бічна зона передруйнування, розміри якої значно перевищують розміри маломасштабної області контакту берегів, а у привершинній частині зони передруйнування виникає зона деструкції, значно менша контактної зони.

З урахуванням співвідношень між розмірами структурних елементів привершинної області дослідження тонкої структури вершини, яке виконано у даній роботі, зведено до послідовного розв’язання методом Вінера-Хопфа наступних трьох задач: про початкову бічну зону передруйнування біля вершини міжфазної тріщини, про область контакту берегів при наявності значно більшої бічної зони передруйнування і про область деструкції матеріалу у привершинній частині зони передруйнування при наявності значно більшої контактної області контакту берегів. З отриманих розв’язків визначено орієнтацію зони передруйнування, виведені рівняння для розрахунку розмірів кожної із зон, знайдено розкриття тріщини та величини, що характеризують напружено-деформований стан в околі вершини.

1. Каминский А.А., О страгивании трещины, расположенной на границе раздела упругих сред / А.А. Каминский, Л.А. Кипнис // Доповіді НАН України. – 2011. – №1. – С.38-43.

Діхтяренко Юлія Володимирівна,
Уманський державнийпедагогічний університет, Умань, Україна
e-mail: dikhtiarenko_iu@mail.ru;
Дудик Михайло Володимирович, кандидат фіз.-мат. наук, доцент
Уманський державнийпедагогічний університет, Умань, Україна
e-mail: dudik_m@hotmail.com;
Дякон Валерій Миколайович, кандидат фіз.-мат. наук, доцент
Уманський відокремлений підрозділ Європейського університету
e-mail: valera_dok@pochta.ru

ПРО ЗРУШЕННЯ ТРІЩИНИ НОРМАЛЬНОГО ВІДРИВУ З ВЕРШИНОЮ У КУТОВІЙ ТОЧЦІ ЛАМАНОЇ МЕЖІ ПОДІЛУ ДВОХ МАТЕРІАЛІВ

Діхтяренко Ю.В., Дудик М.В., Дякон В.М.

Зрушення тріщини у кутовій точці межі поділу двох різних пружних матеріалів передбачає утворення в околі вершини тріщини зони передруйнування з наступним розривом у зоні міжчастинкових зв’язків по досягненню критичних деформацій при збільшенні зовнішнього навантаження. Для моделювання зони використовуємо гіпотезу локалізації [1], яка передбачає, що зона передруйнування зосереджена у вузькому шарі матеріалу, і тому її можна подати поверхнею розриву нормального переміщення, на якій нормальне напруження дорівнює опору відриву матеріалу. В результаті вихідна нелінійна задача механіки руйнування про розрахунок континуальної зони передруйнування зводиться до крайової задачі лінійної теорії пружності зі специфічними розривними граничними умовами.

При розрахунку зони передруйнування в кінці тріщини нормального відриву, яка в умовах плоскої деформації виходить з кутової точки межі поділу двох різних однорідних ізотропних матеріалів, моделюємо зону двома бічними лініями розриву, що симетрично поширюються в одному з матеріалів з вершини тріщини під деяким кутом до її початкового напрямку. Припускаючи маломасштабність зони, формулюємо на нескінченності умову збігу шуканого розв'язку з асимптотичним розв'язком біля вершини тріщини аналогічної задачі без зони передруйнування [2], що дозволяє через коефіцієнт інтенсивності напружень, який міститься у даному розв'язку, врахувати вплив зовнішнього силового поля на параметри зони. Для визначення орієнтації ліній розриву використовуємо умову максимуму потенціальної енергії, накопченої в зоні передруйнування.

Розв'язок відповідної крайової задачі отримано методом Вінера-Хопфа у поєднанні з апаратом інтегрального перетворення Мелліна та деяких положень теорії функцій комплексної змінної. Отримано зручні формули для чисельного визначення орієнтації і довжини маломасштабної зони передруйнування, поля напружень і переміщень в околі вершини тріщини після утворення зони. Знайдено розкриття тріщини у її вершині, яке використовується для формулювання умов зрушення в рамках деформаційного критерію руйнування. Досліджено залежність параметрів зони від навантаження, кута розхилу межі поділу та відношення модулів Юнга матеріалів. Встановлено умови і напрямок зрушення тріщини.

1. Леонов М.Я. Развитие мельчайших трещин в твердом теле / М.Я. Леонов, В.В. Панасюк // Прикладная механика. - 1959. - Т. 5, №4. - С. 391-401.

2. Кипнис Л.А. Кусочно-однородная плоскость с границей раздела в форме сторон угла и симметричным разрезом, исходящим из вершины /Л.А. Кипнис //Прикладная математика и механика. – 1996. Т. 50, №2. – С. 334-336.

Янютин Евгений Григорьевич, доктор техн. наук, профессор,
НТУ «ХПИ», Харьков, Украина;
Егоров Павел Анатольевич, ассистент,
Харьковский национальный автомобильно-дорожный университет, Харьков, Украина,
e-mail: egorovpa@online.ua

НЕУСТАНОВИВШИЕСЯ КОЛЕБАНИЯ ШАРНИРНО-ОПЕРТОЙ ПЛАСТИНЫ, ПОДКРЕПЛЕННОЙ ЛИНЕЙНЫМИ РЕБРАМИ ЖЕСТКОСТИ

Егоров П.А., Янютин Е.Г.

В технике и строительстве часто встречаются сложные механические системы, которые состоят из большого количества элементов. В таком случае для построения модели системы можно использовать подход, который основан на выделении основного элемента исследования и учете влияния взаимодействующих с ним объектов с помощью сосредоточенных или распределенных сил. В данной работе на примере механической системы, состоящей из изотропной шарнирно-опертой пластины и подпирающей ее шарнирно-опертой балки, показана возможность применения упомянутого подхода к решению прямых и обратных задач для механических систем, состоящих из пластины и подпирающего ее набора параллельных и перекрещивающихся ребер.

Исследование нестационарных колебаний пластины и подпирающего ребра жесткости производим на основе теории типа Тимошенко. Построение решения поставленных задач осуществляется с использованием разложения искомых функций в ряды Фурье [1]. Найденные в символьном виде прогибы пластины и балки сопоставляем на основе уравнений контакта. Полученные таким образом уравнения являются уравнениями Вольтерра первого рода по отношению к неизвестным функциям контактных усилий. Используя численный метод решения уравнений Вольтерра, приводим упомянутую систему интегральных уравнений к системе алгебраических уравнений [2]. Задача идентификации контактных усилий является некорректной, поэтому для построения устойчивого решения необходимо пользоваться сглаживающими алгоритмами. В приведенном исследовании для решения СЛАУ использовался обобщенный метод Гаусса, при выполнении обратного хода которого для преодоления некорректности постановки задачи использовался алгоритм регуляризации А.Н. Тихонова.

Решение обратной задачи, которая заключается в восстановлении функции изменения возмущающей нагрузки во времени, строится с использованием дополнительной информации о прогибах пластины. В качестве дополнительной информации может выступать как зависимость прогибов от времени, так и другие функции, характеризующие деформированное состояние системы. При построении решения обратной задачи также использовался сглаживающий алгоритм.

Достоверность решения прямой задачи проверялась путем сопоставления с результатами, полученными методом конечных элементов. Правильность решения обратной задачи можно проверить, например, при сравнении восстановленной функции с исходными данными соответствующей прямой задачи.

1. Янютин Е.Г. Задачи импульсного деформирования элементов конструкций/ Е.Г. Янютин, И.В. Янчевский, А.В. Воропай, А.С. Шарапата. – Харьков: ХНАДУ, 2004. – 392 с.

2. Янютин Е.Г. Математическое моделирование нестационарных колебаний элементов конструкций / Е.Г. Янютин, Н.И. Воропай, Г.А. Гнатенко, А.С. Шарапата. – Харьков : Изд-во «Лидер», 2014. – 297 с.

Жук Ярослав Олександрович,доктор фіз.-мат. наук, проф.,
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
e-mail: y.zhuk@i.ua;
Васильєва Лариса Яківна, старший викладач кафедри математики,
Миколаївський національний університет імені В.О.Сухомлинського,
e-mail: lara@vasiliev.mk.ua

АКТИВНИЙ КОНТРОЛЬ КОЛИВАНЬ ШАРУВАТИХ ТОНКОСТІННИХ ЕЛЕМЕНТІВ КОНСТРУКЦІЙ З П'ЄЗОАКТИВНИМИ ШАРАМИ

Жук Я.О., Васильєва Л.Я.

Жорсткі умови функціонування складної сучасної техніки вимагають переходу від традиційних методів керування коливаннями до розробки нових підходів, які дозволяють реалізовувати складніші та ефективніші режими роботи при дотриманні численних критеріїв довговічності та надійності. В результаті моделювання коливань гнучких конструкцій та їх елементів, разом із вивченням можливостей керування ними, отримало новий імпульс в своєму розвитку і націлене на розробку систем з покращеними або якісно новими характеристиками. Зокрема, використання матеріалів із специфічними властивостями (п'єзоелектрики, матеріали з пам'яттю форми, матеріали, які мають електрострикційні, електромагнітопружні та інші електрореологічні властивості), широко розповсюджено в застосуваннях, направлених на активний контроль коливань. Напевно найчастіше використовуються п'єзоактивні елементи у вигляді сенсорів та/або актуаторів. Моделювання коливань і контролю елементів з такими розподіленими сенсорами (актуаторами), як правило, зводиться до розв'язання задач для шаруватих балок, пластин або оболонкових конструкцій, які або містять п'єзоактивні шари, або є повністю чи частково покритими ними.

В даній роботі з цією метою використовується модельна задача про вимушені коливання шарнірно опертої тришарової балки, середній шар якої виготовлений з алюмінієвого сплаву, а зовнішні – з п'єзокераміки. Поведінка матеріалу електрично пасивного (без п'єзоефекту) сплаву характеризується за допомогою моделі із внутрішніми змінними стану, яка описує фізично нелінійну реакцію матеріалу. П'єзокерамічні шари вважаються пружними трансверсально ізотропними. Досліджуються питання механічного та електричного збудження коливань, можливість демпфірування механічно збуджуваних коливань за допомогою подачі відповідної різниці електричних потенціалів на контакти п'єзошарів, особливості впливу фізичної нелінійності поведінки матеріалу пасивних шарів на реакцію шару-сенсора і конструкції загалом, вплив геометричної нелінійності як при перехідних, так і при стаціонарних режимах роботи.

Встановлено, що вплив геометричної та фізичної нелінійностей проявляється у виникненні зсуву фаз між навантаженням і реакцією системи, формуванні зігнутої осі балки, виникненні залишкових коливань із власною частотою на першій згинній моді та коливань із частотами, кратними частоті збудження. Подальше зменшення амплітуд залишкових коливань можливе за використання методів активно–пасивного демпфірування, наприклад, введення додаткових покриттів, що розсіюють енергію і містять матеріали із високою в'язкістю, або організації електричних ланцюгів із зворотним зв'язком.

1. Жук Я.А. Активное демпфирование вынужденных колебаний шарнирно опертой балки, содержащей пьезоактивные слои, при учете геометрической и физической нелинейностей / Жук Я.А., Гузь И.А. // Прикл. механика. – 2009. – 45, № 1. – С. 118-136.

2. Zhuk Y.A. Analysis of the vibrationally induced dissipative heating of thin-wall structures containing piezoactive layers/ Zhuk Y.A., Guz I.A., Sands C.M. // International Journal of Non-Linear Mechanics. -2012.- v. 47.- P. 105–116.

Карнаухов Василий Гаврилович, доктор физ.-мат. наук, профессор ,
Институтмеханикиим. С.П.Тимошенко, Киев,Украина,
e-mail: karn@inmech.kiev.ua;
Козлов Владимир Ильич, доктор физ.-мат. наук, профессор ,
Институтмеханикиим. С.П.Тимошенко, Киев,Украина,
e-mail: karn@inmech.kiev.ua;
Карнаухова Татьяна Васильевна, кандидат физ.-мат.наук, доцент,
Киевский национальный технический университет (КПИ),Киев,Украина,
e-mail: karn@inmech.kiev.ua;

АКТИВНОЕ ДЕМПФИРОВАНИЕ НЕУПРУГОЙ КОНИЧЕСКОЙ ПАНЕЛИ ПРИ ПОМОЩИ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СЕНСОРОВ И АКТУАТОРОВ

Карнаухов В.Г., Козлов В.И.,Карнаухова Т.В.

Рассмотреназадача об активном демпфировании вынужденных резонансных колебаний неупругой конической панели при помощи пьезоэлектрических сенсоров и актуаторов, когда к актуатору подводится разность потенциалов, пропорциональная скорости изменения снимаемого с сенсора показателя. Для моделирования термомеханического поведения неупругих материалов используется концепция комплексных характеристик. Рассматривается два типа физической нелинейности. Первый тип порождается зависимостью характеристик материала от температуры и зависимостью диссипативной функции от температуры и полевых величин (например, деформаций). Второй тип обусловлен зависимостью указанных характеристик и диссипативной функции от полевых величин. Для описания термоэлектромеханического состояния оболочки применяются гипотезы Кирхгоффа-Лява, дополненные адекватными им допущениями о распределении температуры и электрических полевых величин. Предложены итерационные методы решения полученных нелинейных уравнений в частных производных, сводящие исходную нелинейную задачу к решению последовательности линейных задач механики с комплексными коэффициентами и уравнению теплопроводности с известным источником тепла. При решении задач с нелиненйностью первого типа применяется иетрационная процедур а пошагового интегрирования во врмени, а при решении задач снелиненйностью второго типа – обощенный метод переменных параметров упругости. Дается вариационная постановка указанных линейных задач. Для решения вариационных задач применяется метод конечных элементов. На основании указанных методов исследовано влияние различных факторов (физических нелинейностей, граничных механических и тепловых условий, структурной неоднородности, размещения сенсоров и актуаторов, их размеров и др.) на эффективность работы сенсоров и атктуаторов и на эффективность активного демпфирования вынужденных резонансных колебаний конической панели при помощи пьезоэлектрических сенсоров и атуаторов. Найдены критические значения параметров нагружения, после достижения котолрых система управления колебания не выполняет своего функциоанального назначения в результате достижения температурой диссипативногоо разогрева точки Кюри активного материала. Найдено также критическое время при нагружении панели закритической нагрузкой, при котором температура достигает точки Кюри. Построены кривые типа Велера – зависимость критического времени от параметра нагружения.

Коваленко Анатолий Петрович, кандидат физ.-мат. наук, старший научный сотрудник,
Институт механики имени С.П. Тимошенко НАН Украины, Киев, Украина,
e-mail: koval.ap@yandex.ua;
Шекера Марфа Карповна, кандидат физ.-мат. наук,
Институт механики имени С.П. Тимошенко НАН Украины, Киев, Украина,
e-mail: dynamic@inmech.kiev.ua

ПРИМЕНЕНИЕ ЧИСЛЕННОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА-КАРСОНА ПРИ МАТЕМАТИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В СИСТЕМЕ ПОЛУБЕСКОНЕЧНАЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКАЯ ОБОЛОЧКА-ЖИДКОСТЬ

Коваленко А.П., Шекера М.К.

В данной работе ставится цель исследовать возможность применимости интегрального преобразования Лапласа-Карсона при математическом моделировании переходных процессов в гидроупругих системах полубесконечная цилиндрическая оболочка-жидкость при продольных импульсных нагрузках. Задачи исследования динамических (в том числе переходных) процессов в различного вида технических устройствах требуют создания адекватных методов исследования. При определенных условиях многие нестационарные процессы в полубесконечных цилиндрических оболочках с жидкостью можно рассматривать в линейной постановке без существенного влияния на точность результатов [1]. Поэтому применение интегрального преобразования Лапласа-Карсона по времени в таких задачах является достаточно обоснованным [2,3].

При исследовании переходных процессов в рассматриваемых гидроупругих системах оболочка рассматривается по модели Тимошенко, а жидкость – в акустическом приближении. Такая постановка позволяет учитывать волновой характер распространения возмущений и взаимосвязь элементов системы. Начально-краевая задача записывается в линейной постановке. В безразмерном виде выделяются характерные массово-геометрические и волновые характеристики системы. Для решения поставленной задачи применяется интегральное преобразование Лапласа-Карсона по времени $f^*(p) = p\int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt$. В пространстве изображений находится приближенное аналитическое решение по методу итераций. Переход в пространство оригиналов предполагается осуществлять численно.

Предложенный подход позволяет анализировать влияние характерных величин на переходные процессы в данной гидроупругой системе.

1. Сагомонян Е.А. О распространении продольных волн в цилиндрической оболочке.// Вестн. Моск.ун-та. Математика, механика, 1977, №1, С.111-112.

2. Кубенко В.Д. Нестационарное взаимодействие элементов конструкций со средой. – Киев: Наук.думка, 1979.–184с.

3. Коваленко А.П. О применимости интегрального преобразования Лапласа-Карсона при математическом моделировании переходных процессов в цилиндрических оболочках // Вестник Херсонского национального технического университета. Вып. 3(39).– Херсон: ХНТУ, 2010.– 554с. - С.213-217.

Julia I. Kucher, Junior Researcher,
Institute of Mathematics of NAS Ukraine,
e-mail: julykucher@gmail.com
Alexander L. Zuyev, Prof. Dr. (Phys.–Math.),
Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Ukraine,
Max Planck Institute for Dynamics of Complex Technical Systems, Magdeburg, Germany,
e-mail: zuyev@mpi-magdeburg.mpg.de, alexander.zuyev@gmail.com;

ASYMPTOTIC DISTRIBUTION OF THE SPECTRAL PARAMETER IN THE STABILIZATION PROBLEM FOR A BEAM SYSTEM

Julia I. Kucher, Alexander L. Zuyev

We consider the stabilization problem for a mechanical system consisting of a simply supported flexible beam of the length l with distributed and lumped controls.

The dynamical model of the Euler-Bernoulli beam is written as the following differential equation

$$\frac{d}{dt}\xi(t) = \tilde{A}\xi(t) \tag{1}$$

in the Hilbert space $X = \overset{\circ}{H}{}^2(0,l)\times L^2(0,l)\times\mathbb{R}^2$. Here $\tilde{A}$ is the linear differential operator corresponding to the closed-loop system with the feedback control that was constructed assuming that the total energy is nonincreasing on the trajectories of the closed-loop system and guarantees the Lyapunov stability of the equilibrium of the dynamical system. However, the question about asymptotic stability requires special consideration.

In order to obtain sufficient conditions for asymptotic stability of the equilibrium for the distributed parameter system, one has to study the limit behavior of solutions of the corresponding spectral problem.

An application of LaSalle's invariance principle to the asymptotic stability analysis requires to consider the following spectral problem

$$A\xi = \lambda\xi \tag{2}$$

for the infinitesimal generator.

Solving the spectral problem is reduced to the transcendental equation for the spectral parameter μ:

$$\Phi_0(\mu)\frac{e^{\mu l}}{\mu} + o(\frac{e^{\mu l}}{\mu}) = 0, \tag{3}$$

as $\mu\to+\infty$. Here $\Phi_0(\mu) = -\frac{m}{8}\left(\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\mu l\right)-\cos(\mu(l-2l_0))\right)$.

In this presentation, we show the equivalence in the sense of the limit behavior of solutions of equations (3) and

$$\Phi_0(\mu)+\Phi_1(\mu) = 0, \tag{4}$$

where $\Phi_1(\mu)\to 0$ as $\mu\to+\infty$.

This made it possible to characterize the distribution of eigenvalues of the differential operator that proves linear independence of the eigenfunctions.

As a result of this work, we obtain a sufficient condition for the asymptotic stability of the trivial solution of dynamical system (1)

Назаренко Володимир Михайлович, доктор технічних наук, професор,
Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, Київ, Україна,
e-mail: nazvm1@gmail.com;
Кіпніс Олександр Леонідович, аспірант,
Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, Київ, Україна,
e-mail: a.l.kipnis@gmail.com

ПРО ІНТЕНСИВНІСТЬ НАПРУЖЕНЬ БІЛЯ КІНЦЯ ВНУТРІШНЬОЇ ПІВНЕСКІНЧЕННОЇ ТРІЩИНИ У БІОДНОРІДНІЙ ПЛОЩИНІ

Назаренко В.М., Кіпніс О.Л.

Розглянуто плоскі симетричну задачу про пружну рівновагу кусково-однорідної ізотропної площини з межею поділу середовищ у формі сторін кута, яка в одній з частин містить внутрішню півнескінченну тріщину нормального розриву. Береги тріщини знаходяться під дією тиску.

З використанням апарату інтегрального перетворення Мелліна [1] задачу зведено до функціонального рівняння Вінера – Хопфа [2] у смузі комплексної площини, що містить уявну вісь. Факторизація коефіцієнта рівняння на уявній осі здійснюється шляхом його розщеплення на функцію, яка факторизується за допомогою гамма-функцій [3], і функцію, яка факторизується за формулою Гахова [4]. З використанням цих факторизацій побудовано точний розв'язок рівняння Вінера – Хопфа, який виражається через інтеграли типу Коші та гамма-функції. На основі даного розв'язку виведено формулу для коефіцієнта інтенсивності напружень у кінці тріщини.

Досліджено поведінку напружень біля кутової точки. Показано, що кутова точка O є особливою точкою розглянутої крайової задачі теорії пружності. Вона являє собою гострокінцевий концентратор напружень. При наближенні точки області до точки O напруження прямують до нескінченності.

Особливість напружень у точці O степенева. Показник степеня сингулярності напружень залежить від кута, відношення модулів Юнга та від коефіцієнтів Пуассона. Цей показник являє собою єдиний на інтервалі $]-1;0[$ корінь певного трансцендентного рівняння.

Проаналізовано залежність показника степеня сингулярності напружень від кута та відношення модулів Юнга. Вивчено вплив зміни параметрів задачі на рівень концентрації напружень біля кутової точки.

Зі зростанням кута від нуля до π концентрація напружень біля кутової точки спочатку посилюється, а потім послаблюється. Чим більше відрізняються матеріали, тим сильніша концентрація напружень біля кутової точки.

1. Уфлянд Я.С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. – Ленинград: Наука, 1967. – 402 с.

2. Нобл Б. Применение метода Винера – Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1962. – 279 с.

3. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. – Москва: Наука, 1987. – 688 с.

4. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. – Москва: Наука, 1977. – 640 с.

Лакиза Владимир Данилович, кандидат техн. наук, ст. научн. сотрудник,
Институт механики им. С.П.Тимошенко НАН Украины,
e-mail: volna@inmech.kiev.ua

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ПРОЦЕССОВ ДЕФОРМИРОВАНИЯ КОМПОЗИТНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК С ЗАПОЛНИТЕЛЕМ ПРИ РАЗЛИЧНЫХ ТИПАХ ВИБРОВОЗБУЖДЕНИЯХ

Лакиза В.Д.

В настоящем сообщении приводятся результаты экспериментальных исследований упругой стеклопластиковой оболочки (“сухой” и с заполнителем), как при отдельно поперечном силовом и продольном кинематическом возбуждениях, так и при их совместном воздействии. В качестве заполнителя используется сыпучий материал типа малых (диаметром d≈0,5 см) пенопластиковых шариков. При проведении экспериментальных исследований установлено, что от величины амплитуды внешнего радиального силового возбуждения зависят не только величины резонансных частот, но и формы колебаний стенки оболочки, особенно в окружном направлении. Так, в определенных областях частот, которые находятся между резонансными частотами сопряженных форм, реализуются традиционные вынужденные колебания стоячие или бегущие в окружном направлении изгибные волны. При наличии заполнителя в оболочке частоты бегущей волны незначительно уменьшаются, а реализация этого явления происходит при больших уровнях внешнего возбуждения. При этом частоты колебаний оболочки равны частотам поперечного силового возбуждения. При продольном кинематическом возбуждении был обнаружен нелинейный супергармонический резонанс, возникающий при равенстве частоты возбуждения половине частоты одной из мод собственных поперечных колебаний стенки цилиндрической оболочки. При проведении исследований установлено, что супергармонический резонанс более опасен, чем линейный и параметрический. Вследствие гистерезисного эффекта [1], положение и ширина областей, в которых возбуждаются колебания, зависят от направления сканирования частоты и уровня амплитуды возбуждения. При увеличении частоты возбуждения сопряженные формы пересекаются при большом уровне кинематического возбуждения ($g_в$=20 g_0), что приводит к возбуждению бегущей волны. При уменьшении частоты возбуждения реализуется гистерезисное “затягивание” колебательных режимов [1], что сопровождается расширением областей параметрических резонансов, взаимодействием сопряженных окружных форм и возбуждением бегущей волны при меньшей амплитуде возбуждения ($g_в$=10g_0). При кинематическом возбуждении области динамической неустойчивости композитной оболочки расширяется, а при увеличении уровня заполнителя – сужаются. При совместном поперечно-продольном вибронагружении происходит одновременное возбуждение как вынужденных резонансных колебаний с частотами Ω, так и параметрических колебаний верхнего торца оболочки в зоне демультипликационного резонанса - 2Ω. При совместном действии данных нагрузок появляются качественно новые нелинейные эффекты, которые не обнаруживаются при вынужденных или параметрических колебаниях оболочек с заполнителем. Так, при совместном возбуждении на частоте $f_в$=80 Гц верхний торец оболочки от силового радиального воздействия колеблется с частотой $f_{об}$=80 Гц, а от кинематически продольного одновременно с - $f_{об}$=40 Гц. Такой процесс деформирования существенно усложняется по сравнению с однотипным возбуждением.

1. Кубенко В.Д., Ковальчук П.С., Лакиза В.Д. Экспериментальный анализ нелинейных колебаний стеклопластиковых оболочек вращений // Динамика элементов конструкций. Под ред. В.Д.Кубенка. – К.: «АСК». 1999. – С.298-313 – (Механика композитов: В 12-ти т.: Т.9).

Лакиза Владимир Данилович, канд. техн. наук, ст. науч. сотрудник
Институт механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины,Киев, Украина,
e-mail:volna@inmech. kiev. ua
Крук Леся Анатолиевна, канд. физ.- мат. наук, доцент кафедры теоретической механики
Национального транспортного университета, Киев, Украина,
e-mail:krukles@ukr.net

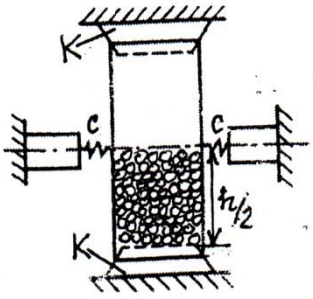
О КОЛЕБАНИЯХ КОМПОЗИТНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК С ЖИДКОСТНЫМ И СЫПУЧИМ ЗАПОЛНИТЕЛЕМ.

Лакиза В. Д. , Крук Л.А.

Тонкостенные оболочки, заполненные жидкостью, мелкозернистыми и сыпучими структурами находят широкое применение в машиностроении, химической и медицинской промышленности. В процессе эксплуатации такие конструкции подвергаются, в том числе целенаправленно, действию внешних периодических нагрузок, которые могут вызывать интенсивные колебания, поэтому актуальными являются задачи о влиянии разного рода наполнителей на основные динамические характеристики несущих конструкций − их частоты и формы колебаний.

В данном сообщении проведено исследование колебаний композитной оболочки, заполненной частично или не полностью жидкостью. Исходные уравнения оболочки соответствуют классической теории. На торцах оболочки выполнены условия свободного опирания. Гидродинамическое давление определено из интеграла Лагранжа-Коши. Построена система уравнений, описывающая связанные колебания стенок оболочки и свободной поверхности жидкости, которая впоследствии преобразовывалась к нормальным координатам. Используя вводимые замены совместно с аппроксимациями прогибов оболочки и поверхности жидкости методом «модального» анализа, были определены реальные изгибные формы оболочки и такие же формы возмущенной поверхности жидкости. Частоты устанавливались на основании характеристического уравнения. Рассмотрен ряд задач о влиянии глубины заполнения жидкости h на частоты и формы. Установлено, что при некоторых глубинах h изменение частот происходит не- монотонно. При $0{,}25<h/l<0{,}5$ ($l-$ длина оболочки) появляется «горизонтальное плато», в котором частоты с увеличением h изменяются очень мало.

Для качественного подтверждения теории проведено экспериментальное исследование колебаний стеклопластиковой оболочки с сыпучим заполнителем типа мелкозернистых структур. Возбуждение колебаний проводилось двумя вибраторами ВЭДС-10, контактирующими с оболочкой по диагонали упругими связями c (см. рис.).



В результате исследований было установлено, что наличие заполнителя обуславливает некоторое демпфирование колебаний оболочки и приводит к уменьшению её собственных частот.

При увеличении глубины заполнителя наблюдается смещение пучностей продольных волн в направлении горизонтальной плоскости, на которой крепится нижний установочный диск *K*. Обнаружено также, что сопряженные изгибные формы оболочки при её взаимодействии с заполнителем характеризуются более близкими частотами по сравнению со случаем незаполненной оболочки.

Михаськів Віктор Володимирович, доктор фіз.-мат. наук, професор,
ІППММ ім. Я.С. Підстригача НАН України, Львів, Україна,
e-mail: tex@iapmm.lviv.ua;
Кунець Ярослав Іванович, доктор фіз.-мат. наук, старший науковий співробітник,
ІППММ ім. Я.С. Підстригача НАН України, Львів, Україна,
e-mail: kunets@iapmm.lviv.ua;
Матус Валерій Володимирович, кандидат фіз.-мат. наук, старший науковий співробітник,
ІППММ ім. Я.С. Підстригача НАН України, Львів, Україна,
e-mail: matus@iapmm.lviv.ua

УСЕРЕДНЕНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ SH-ХВИЛЬ У ВОЛОКНИСТИХ КОМПОЗИТАХ ЗА НАЯВНОСТІ ТОНКИХ МІЖФАЗНИХ ПРУЖНИХ ВКЛЮЧЕНЬ

Михаськів В.В., Кунець Я.І., Матус В.В.

Розглядається задача поширення гармонічних SH-хвиль у пружному необмеженому матричному композиті із стохастично розподіленими пружними волокнами неканонічної форми за наявності тонких міжфазних пружних податливих включень. У цьому випадку граничні умови ідеального механічного контакту між включенням і навколишнім середовищем зводяться до пропорційних залежностей між напруженнями та стрибками переміщень на серединній лінії міжфазної неоднорідності [1]. На решті межі контакту волокна і матриці переміщення і напруження неперервні.

Поширення гармонічних хвиль у таких композитних матеріалах характеризується загасанням і дисперсією, які можна визначити із дисперсійного співвідношення Фолді, шляхом введення ефективного комплексного хвильового числа $K(\omega)$ [2]

$$K(\omega) = \frac{\omega}{c(\omega)} + i\alpha(\omega),$$

де $c(\omega)$ і $\alpha(\omega)$ – ефективна фазова швидкість хвилі та її коефіцієнт загасання, ω – кругова частота. Хвильове число $K(\omega)$ визначається на основі розв'язку задачі розсіяння плоскої пружної хвилі локальним розсіювачем. Такий розв'язок знаходимо за допомогою модифікованого методу нульового поля [3].При цьому невідомі переміщення і напруження на контурі волокна подаємо у вигляді тригонометричних рядів Фур'є з ваговими множниками, які відображають сингулярний характер поведінки шуканих функцій в околі точок зміни граничних умов.

Проаналізовано вплив форми волокон, протяжності міжфазних включень, механічних властивостей пружної системи, концентрації наповнювачів на частотні залежності ефективних фазових швидкостей і коефіцієнтів загасання пружних хвиль у матричному волокнистому композиті.

1. Emets V.F. Scattering of SH waves by an elastic thin-walled rigidly supported inclusion / V.F.Emets, Ya.I.Kunets, V.V. Matus // Arch. Appl. Mechanics. – 2004. – Vol. 73. – P. 769-780.

2. Mykhas'kiv V. V. Numerical Simulation of Wave Propagation in 3D Elastic Composites with Rigid Disk-Shaped Inclusions of Variable Mass, Chapter 2. Composites and Their Applications (edited by N. Hu) / V. V. Mykhas'kiv. – Rijeka (Croatia): InTech Press, 2012. – P. 17-36.

3. Matus V. Wave propagation in 2-D elastic composites with partially debonded fibers by the null field approach / V. Matus, Y. Kunets,V. Mykhas'kivet al. // Waves in Random and Complex Media. – 2009. – Vol. 19, No 4. – P. 654-669.

Незамай Борис Сергійович, кандидат технічних наук, доцент
Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу, Івано-Франківськ, Україна,
e-mail: boris_may@ukr.net
Попович Ольга Миколаївна, студент 4 курсу, інститут інформаційних технологій
Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу, Івано-Франківськ, Україна
e-mail: boris_may@ukr.net

МОДЕЛЬ ВПЛИВУ ЕКСПЛУАТАЦІЙНИХ НАВАНТАЖЕНЬ НА ДІЛЯНКУ МАГІСТРАЛЬНОГО ГАЗОПРОВОДУ З ЛОКАЛЬНОЮ ЗМІНОЮ ФОРМИ ОСІ

Незамай Б. С., Попович О. М.

Лінійна частина магістральних трубопроводів внаслідок впливу зовнішніх факторів може втрачати стійкість шляхом зміни просторового положення осі труби. Зокрема, можуть утворюватись арки, провисання. Ставиться задача оцінки впливу експлуатаційного навантаження – внутрішнього тиску – на напружено-деформований стан такого об'єкта.

Побудуємо тривимірну параметризацію ділянки трубопроводу в допущенні про незмінність форми перерізу[1]. Для умовного "початкового" моменту часудеформована ділянка представляється у вигляді:

$$\vec{r}_0 = \begin{cases} x'_0 = (R(x) + r\cos\theta)\cos\varphi \\ y'_0 = (R(x) + r\cos\theta)\sin\varphi \\ z'_0 = r\sin\theta \end{cases}. \qquad (1)$$

У актуальний момент часу, під дією внутрішнього тиску, для параметризації ділянки трубопроводу використано співвідношення:

$$\vec{r} = \begin{cases} x' = (R(x) + (r + u(r))\cos\theta)\cos\varphi \\ y' = (R(x) + (r + u(r))\cos\theta)\sin\varphi \\ z' = (r + u(r))\sin\theta \end{cases}. \qquad (2)$$

У формулах (1) і (2) прийнято наступні позначення: $x'_0, y'_0, z'_0, x', y', z'$ – координати точок тіла трубопроводу в деякій прямокутній системі координат $x0y$; r – координата, що описує тіло трубопроводу в радіальному напрямі, при чому $R_{ВІ} \le r \le R_{ЗВ}$; $R_{ВІ}$, $R_{ЗВ}$ – відповідно, внутрішній та зовнішній діаметр трубопроводу; θ – кругова координата, $0 \le \theta \le 2\pi$; φ – кут, що характеризує деформовану ділянку в повздовжньому напрямі, $0 \le \varphi \le \varphi_1$; тут φ_1 – кут сегмента круга, що відповідає точкам початку та кінця ділянки із втратою стійкості; згаданий круг будується на основі координат тих самих точок та координат точки максимального відхилення ділянки трубопроводу від початкового положення в наслідок втрати стійкості; $u(r)$ – вираз для плоскої деформації, що відповідає класичній задачі Ламе і дозволяє врахувати у моделі внутрішній тиск – експлуатаційне навантаження; $R(x) = \dfrac{\left(\sqrt{1 + y'(x)^2}\right)^3}{|y''(x)|}$ – радіус кривизни деформованої осі трубопроводу у кожній його точці. На основі прийнятих допущень подальші обчислення рекомендується проводити за стандартною методикою[1].

1. Олійник А. П. Математичні моделі процесу квазістаціонарного деформування трубопровідних та промислових систем при зміні їх просторової конфігурації: наукове видання / А. П. Олійник. – Івано-Франківськ: ІФНТУНГ, 2010. – 320с.

Пантелят Михайло Гаррійович, кандидат фіз.-мат. наук, старший науковий співробітник,
кафедра «Електричні апарати», Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», Харків, Україна
e-mail: m150462@yahoo.com;
Гуренцов Юрій Володимирович, студент 5 курсу, Електромашинобудівний факультет,
Трофімов Андрій Володимирович, студент 5 курсу, Електромашинобудівний факультет,
кафедра «Електричні апарати», Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», Харків, Україна

МОДЕЛЮВАННЯ МЕТОДОМ СКІНЧЕНИХ ЕЛЕМЕНТІВ ЕЛЕКТРОМАГНІТНИХ І ТЕПЛОВИХ ПОЛІВ В ІНДУКЦІЙНИХ КУХОННИХ ПЛИТАХ

Пантелят М.Г., Гуренцов Ю.В., Трофімов А.В.

В основу принципу дії побутових індукційних кухонних плит покладено розігрів металевого посуду вихровими струмами, які створюються електромагнітним полем частотою 20-100 кГц. Авторами розроблено та апробовано інженерну методику розрахунку та проектування основного конструктивного елементу такої плити – індуктору (плоскої одновиткової або багатовиткової котушки, при протіканні по якій змінного струму створюється електромагнітне поле, яке індуктує в свою чергу вихрові струми в посуді, що нагрівається). Основні результати розрахунку індуктора (геометрія, електричні та енергетичні величини, кількість витків) повинні бути перевірені та уточнені шляхом комп'ютерного моделювання розподілу електромагнітного та температурного поля індукційної плити, а також посуду, що нагрівається, в процесі експлуатації плити.

Запропонована методика чисельного аналізу розподілу електромагнітного поля побутової індукційної плити. Математична модель електромагнітних процесів у конструкціях, що розглядаються, представляє собою підсистему рівнянь Максвелла в диференційний формі без урахування струмів зсуву. Розрахунок електромагнітного поля виконується у двовимірній постановці методом скінчених елементів з використанням векторного магнітного потенціалу. У загальному випадку, враховуються магнітні властивості феромагнітних матеріалів магнітопроводу індукційної плити та посуду, що нагрівається. Чисельні дослідження виконуються з використанням пакета програм EleFAnT2D, розробленого в Інституті основ та теорії електротехніки Технічного університету м. Грац, Австрія [1]. Можливо також використання іншого програмного забезпечення, призначеного для розрахунку електромагнітних полів у двовимірній постановці.

Розроблена також методика комп'ютерного моделювання теплових процесів в основних конструктивних елементах індукційних кухонних плит і у посуді, що нагрівається. Математична модель розподілу температурного поля представляє собою нестаціонарне рівняння теплопровідності з граничними умовами, що описують конвективний теплообмін с оточуючим середовищем. Розрахунок виконується у двовимірній постановці методом скінчених елементів. У загальному випадку, враховуються залежності теплофізичних властивостей матеріалів від температури. Розподіл у просторі та у часі щільності теплових втрат (потужності внутрішніх джерел тепла) у електропровідних елементах конструкції вважається відомим за результатами розрахунку розподілу електромагнітного поля та щільності вихрових струмів.

У доповіді детально розглянуто структуру вихідних даних та результатів обчислень, наведено та проаналізовано отримані попередні чисельні результати. Розроблені методикикомп'ютерного моделювання і отримані результати можуть бути використані в практиці конструювання індукційних плит, а також у навчальному процесі.

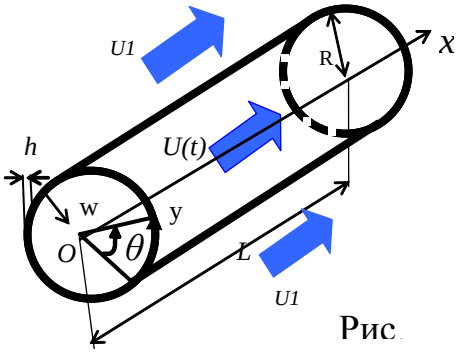
1. http://www.igte.tugraz.at/de/elefant/elefant.html.

Подчасов Николай Павлович, кандидат физ.-мат. наук, доцент,
Институт механики имени С.П. Тимошенко НАН Украины, Киев, Украина,
e-mail: npodchas@inmech.Kiev.ua

НЕУСТАНОВИВШИЕСЯ КОЛЕБАНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ, ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩЕЙ С ВНЕШНИМ И ВНУТРЕННИМ ПОТОКАМИ ЖИДКОСТИ, ПРИ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФИНИТНЫХ ВОЗМУЩЕНИЯХ СКОРОСТИ ВНУТРЕННЕГО ПОТОКА

Подчасов Н.П.

Исследуется динамика композитной, ортотропной цилиндрической оболочки длины L, радиуса R, толщины h, с плотностью ρ, свободно опертой на торцах. Оболочка взаимодействует с внутренним и внешним потоками идеальной несжимаемой жидкости с плотностями ρ_0 и ρ_1, протекающими в направлении ее продольной оси Ox со скоростями $U(t)$ и $U1=const$ соответственно. За положительное направление отсчета радиального прогиба оболочки $w(x,y,t)$ выбрано направление к этой оси (рис.1). Предполагается, что постоянное (номинальное) значение U_0 скорости $U(t)$ на конечном интервале времени $[t_1,t_2]$ подвержено воздействию гармонических возмущений с амплитудой pU_0 и частотой λ. Таким образом, закон изменения во времени скорости $U(t)$ имеет вид: если $t\in[t_1,t_2]$, то



Рис

$$U(t)=U_0+pU_0\,Sin\lambda(t-t_1)\ ,\ \text{иначе}\ \ U(t)=U_0\ \ ;p\in[-1,1] \quad (1)$$

Динамический прогиб $w(x,y,t)$, удовлетворяющий условиям свободного опирания, представлялся в виде:

$$w(x,y,t)=[f_1(t)\cos sy+f_2(t)\sin sy]\sin\lambda_1 x+[f_3(t)\cos sy+f_4(t)\sin sy]\sin\lambda_2 x+|f_5(t)|\sin\lambda_1 x\ , \quad (2)$$

где $f_k(t)$ $(k=1....5)$ – подлежащие определению функции времени; $\lambda_1=\pi/L$; $\lambda_2=2\pi/L$; $s=n/R$ – параметры волнообразования. Последнее неотрицательное ” корректирующее ”" слагаемое $|f_5(t)|\sin\lambda_1 x$ отражает известный из экспериментов эффект ”преимущественного выпучивания оболочек вовнутрь” в случае их больших прогибов [1]. В качестве исходных динамических уравнений оболочек, взаимодействующих с жидкостью., использовались, записанные в смешанной форме и традиционных обозначениях, уравнения вида [1]:

$$\frac{1}{h}\nabla_D^4 w=\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}+\frac{1}{R}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}-\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-\varepsilon\rho\frac{\partial w}{\partial t}-\frac{(P_2-P1_2)}{h};$$

$$\nabla_\delta^4\Phi=\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)^2-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-\frac{1}{R}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \quad (3)$$

Потенциалы скоростей $\Psi(x,r,\theta,t)$, $\Psi1(x,r,\theta,t)$ внутреннего и внешнего потоков находились из решения уравнений Лапласа с соответствующими краевыми условиями, после чего внутреннее и внешнее гидродинамические давления, согласно интегралу Лагранжа–Коши, выражались так:

$$P_2=-\rho_0\left[x\frac{dU(t)}{dt}+\frac{\partial\psi}{\partial t}\bigg|_{r=R-h/2}+U\frac{\partial\psi}{\partial x}\bigg|_{r=R-h/2}\right];\ P1_2=-\rho_1\left[x\frac{dU1(t)}{dt}+\frac{\partial\psi 1}{\partial t}\bigg|_{r=R+h/2}+U1\frac{\partial\psi 1}{\partial x}\bigg|_{r=R+h/2}\right] \quad (4)$$

В результате подстановки выражений (2), (4) в уравнения системы (3) и применения процедуры Бубнова–Галеркина, была получена система обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений для определения неизвестных функций $f_k(t)$. В случае гидродинамического объекта с конкретными физическими параметрами:

$L=1м$; $R=L/5\,м$; $h=R/100\,м$; $\rho=1650\ кг/м^3$; $\rho_1=\rho_0=1000\ кг/м^3$; $\mu_1=0{,}19$;

$E_1=2{,}15\cdot10^9\ Па$; $E_2=1{,}23\cdot10^9\ Па$; $G=2{,}1\cdot10^8\ Па$; $\varepsilon=0{,}1\ c.^{-1}$; $n=3.$; $t_1=1\,c.$; $t_2=21\,c$; $T=60\,c$,

эта система интегрировалась численно при следующих начальних условиях:

при $t=t_0=0$ $f_i(t_0)=0$; $i=1,2,...,5$; $\dfrac{df_1}{dt}=h\,м/c$; $\dfrac{df_i}{dt}=0$; $i=2,...,5$.

Влияние значений параметров флуктуаций скорости (1) на нестационарные колебания оболочки исследовалось путем анализа эволюций огибающих максимумов $Og\max w(X,Y,t)/h$ ее безразмерного прогиба $w(x,y,t)/h$, вычисленного в точке оболочки с координатами $x=X$ и $y=Y$, где прогиб максимален при $t=t_2$. Алгоритм нахождения огибающих приведен в [2]. Была введена определенная обобщенная количественная оценка качества переходных процессов на всем интервале времени их исследования $[t_0,T]$. Такие оценки $MaxOg\max$ вычислялись как максимумы по $t\in[t_0,T]$ соответствующих функций $Og\max w(X,Y,t)/h$. При изучении поведения величин $MaxOg\max$ как функций от параметров λ, U_0, p или $U1$ использовалась безразмерная переменная $\lambda/\Omega1$, где $\Omega1$ есть первая собственная частота оболочки взаимодействующей с соответствующими стационарными скоростными потоками. Точечные графики, приведенные на рис.2, иллюстрируют, например, влияние на величины максимальных прогибов оболочки при переходных процессах значений параметров λ и U_0 в случае, когда $p=0{,}5$ и $U1=7$ м/с.

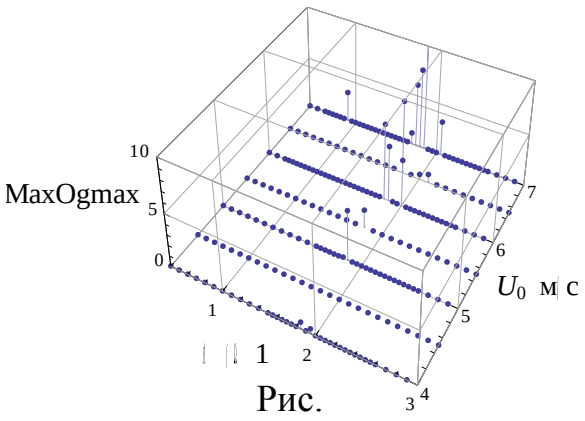


Рис.

Проведенные исследования позволили установить ряд характерных особенностей переходных колебаний оболочек, взаимодействующих с нестационарными жидкостными потоками при финитных гармонических возмущениях скоростей последних. В частности, показано, что в определенных диапазонах частот λ при определенных значениях скорости внешнего потока $U1$, номинальной скорости внутреннего потока U_0 и ее модуляции p в переходных процессах максимальные радиальные прогибы оболочек значительно превосходят амплитуды прогибов при установившихся колебаниях. В некоторых случаях такие экстремальные деформации элементов конструкций оболочечного типа могут выходить за рамки априорных технологических и теоретических ограничений.

1. Вольмир А.С.. Нелинейная динамика пластинок и оболочек /. – М: Наука, 1972.– 432 с.

2. Подчасов Н.П. Переходные процессы в ортотропных цилиндрических оболочках при нестационарном протекании жидкости. International Workshop “Hydrodynamics of Moving Objects”. –Киев.: “Адверта”, 2012. – С. 130–141.

Поліщук Тетяна Вікторівна, ст. викладач, кафедра вищої математики,
Уманський державний педагогічний університет імені Павла Тичини, Умань, Україна,
e-mail: polischuk_t@ukr.net;
Камінський Анатолій Олексійович,доктор фіз.-мат. наук, професор
Інститут механіки ім. С.П. Тимошенко НАНУ, Київ, Україна,
e-mail: fract@inmech.kiev.ua;
Кіпніс Леонід Абрамович, доктор фіз.-мат. наук, професор,
Уманський державний педагогічний університет імені Павла Тичини, Умань, Україна,
e-mail: polischuk_t@ukr.net

ПРУЖНОПЛАСТИЧНА ЗАДАЧА ДЛЯ БІОДНОРІДНОЇ ПЛОЩИНИ З ВНУТРІШНЬОЮ ПІВНЕСКІНЧЕННОЮ ТРІЩИНОЮ

Поліщук Т.В., Камінський А.О., Кіпніс Л.А.

В умовах плоскої деформації у рамках статичної симетричної задачі розглянуто кусково-однорідну площину з межею поділу середовищ у формі сторін кута, яка складена з ізотропних лінійно-пружних частин, що сполучені між собою тонким пружнопластичним з'єднуючим шаром. Перша частина є жорсткішою, ніж друга, якій відповідає кут 2α і яка містить внутрішню півнескінченну тріщину. Береги тріщини знаходяться під дією тиску, розподіленого за законом F / r^2, $r \geq L$.

Зізростанням навантаження біля кутової точки межі поділу середовищ з'являється і розвивається маломаштабна пластична зона у вигляді міжфазних смуг, що виходять з цієї точки.

Ставиться задача визначення довжини слабо розвинутої міжфазної пластичної зони.

Оскільки з'єднуючий матеріал є пружнопластичним, переважні деформації у зоні, що утворилася, розвиваються за механізмом зсуву. Тому смужку-зону моделюватимемо лінією розриву дотичного переміщення, на якій дотичне напруження дорівнює границі текучості на зсув (модель смуг пластичності) [1]. Таким чином, приходимо до задачі теорії пружності для кусково-однорідного тіла клиноподібної конфігурації з розрізами.

З урахуванням малості міжфазних розрізів у відповідності до підходу механіки квазікрихкого руйнування задачу теорії пружності, що розглядається (задача вцілому), розкладемо на зовнішню і внутрішню задачі. Зовнішньою є аналогічна задача без міжфазних розрізів, а внутрішньою – без тріщини. У внутрішній задачі на нескінченності головні члени розвинень напружень в асимптотичні ряди співпадають з головними членами розвинень напружень в асимптотичні ряди біля кутової точки у зовнішній задачі.

Для побудови точних розв'язків зовнішньої і внутрішньої задач використано метод Вінера–Хопфа у поєднанні з апаратом інтегрального перетворення Мелліна [2-4]. На основі цих розв'язків з умови обмеженості напружень біля кінця лінії розриву дотичного переміщення виведено формулу для визначення довжини пластичної зони.

1. Панасюк В. В. Модель смуг пластичності в пружнопластичних задачах механіки руйнування / В. В. Панасюк, М. П. Саврук // Фізико-хімічна механіка матеріалів. – 1992. – № 1. – С. 49–68.

2. Нобл Б. Применение метода Винера–Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных / Б. Нобл. – М. : Изд–во иностр. лит., 1962.– 279 с.

3. Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости /Я. С. Уфлянд.– Л.: Наука, 1967.– 402 с.

4. Каминский А. А.О начальной зоне предразрушения в угловой точке границы раздела упругих сред / А. А. Каминский, Л. А. Кипнис, Т. В. Полищук // Прикладная механика: международный научный журнал. – 2012. – Т. 48, №6. – С. 95–105.

Сандраков Геннадий Викторович, доктор физ.-мат. наук, ведущ. науч. сотрудник,
Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, Киев, Украина,
e-mail: sandrako@mail.ru;

ОСРЕДНЕНИЕ НЕКОТОРЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ-СТОКСА С МАЛОЙ ВЯЗКОСТЬЮ

Сандраков Г.В.

Предполагается рассмотреть начально-краевые задачи для нестационарных уравнений Стокса и Навье-Стокса с периодическими быстро осциллирующими по пространственным переменным данными, имеющими нулевое среднее. Эти задачи формулируются в ограниченных областях, например, трехмерных. Период осцилляций данных определяется малым положительным параметром ε и коэффициент вязкости ν в уравнениях этих задач также может рассматриваться как положительный параметр. Будут приведены оценки решений таких задач, которые зависят от отношений некоторых степеней параметров ε и ν. В общем случае, эти оценки для вектора скорости являются актуальными, когда коэффициент вязкости ν не является слишком малым в сравнении с ε^2. При выполнении этого условия соответствующие решения являются асимптотически малыми в энергетической норме, что характеризует свойство сглаживания решений. В случае, когда коэффициент вязкости имеет порядок ε^2, подходящие оценки получены в предположении "малости" нелинейности в уравнениях рассматриваемых задач. При выполнении этих условий асимптотика для вектора скоростей может содержать быстро осциллирующие слагаемые.

Для точной формулировки конкретного утверждения приведем постановку задачи. Пусть заданы ограниченная область $\Omega \subset R^3$ с гладкой границей, положительное число T, гладкая и финитная вектор-функция $f \in C_0^\infty([0,T]\times\Omega)^3$. Определим вектор-функцию u и функцию p как "слабое" решение начально-краевой задачи для уравнений Навье-Стокса:

$$u_t' - \nu\Delta u + \sigma u\cdot\nabla u + \nabla p = m_\varepsilon f \quad \text{в} \quad \Omega\times(0,T),\ div u = 0 \quad \text{в} \quad \Omega\times(0,T),$$
$$u|_{t=0} = 0 \quad \text{в} \quad \Omega, \qquad u = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega\times(0,T), \tag{1}$$

где действительные параметры ε, ν и σ удовлетворяют следующим неравенствам ограниченности $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$, $0 < \nu \le \nu_0$ и $|\sigma| \le \sigma_0$ для фиксированных ε_0, ν_0 и σ_0. Кроме того, матричнозначная функция m_ε в (1) является ε-периодической и имеет вид $m_\varepsilon = m\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$, где компоненты матричнозначной функции $m(y)$ являются гладкими 1-периодическими (периодическими с периодом 1) функциями.

Теорема. *Пусть u является решением задачи (1). Тогда*

$$\|u\|^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega)^3)} + \nu\|\nabla u\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^{3\times 3})} \le C(\varepsilon^2 + \varepsilon^2\nu^{-1}),$$

где постоянная C не зависит от ε, ν и σ.

Оценка этой теоремы является актуальной при малых ε, если коэффициент вязкости не является слишком малым в сравнении с ε^2. В случае, когда коэффициент вязкости имеет порядок ε^2, подходящие оценки формулируются сложнее и асимптотика для вектора скоростей может содержать быстро осциллирующие слагаемые. Приведенная здесь оценка являются обобщением оценок полученных в [1]. Для доказательства таких утверждений используются асимптотические методы и методы теории осреднения.

1. Сандраков Г.В. Влияние вязкости на осцилляции в некоторых линеаризованных задачах гидродинамики/Г.В. Сандраков//Известия РАН. Сер. математическая - 2007. - 71, № 1. - С. 101-154.

Sandrakov Gennadiy Viktorovich, doktor of phis.-math. science,
Kyiv National Taras Shevchenko University, Kyiv, Ukraine,
e-mail: sandrako@mail.ru;

HOMOGENIZED MULTIPHASE MODELS FOR COMPOSITE MATERIALS

Sandrakov G.V.

The homogenization of unsteady diffusion processes in the composite material consisting of several materials with widely different properties will be considered. The conductivity of one of the materials is assumed to be considerably lower than the conductivity of the other materials. The diffusion processes under study are governed by parabolic equations with coefficients depending on two small positive parameters ε and σ. The microscale parameter ε determines the period of the coefficients in these equations, which corresponds to the assumption that the composite material under study has a periodic structure with period ε. The inverse of σ characterizes the scatter of the conductivities in these equations, which corresponds to the assumption that one of the materials has a very low conductivity as compared to the others.

Homogenized equations whose solutions approximate the solutions to the original equations and estimate the accuracy of such approximations will be presented. Under certain assumptions on the geometry of the periodic distribution of the constituting materials in space, the homogenized equations form a system of equations coupled through exchange coefficients that is a multiphase model. The model coefficients characterize dynamic diffusion exchange between the materials viewed as components of the composite material under consideration and are involved in the homogenized equations via convolution operators with respect to the time variable. Such terms with time convolution in equations has a well-known mechanical interpretation corresponding to the memory effect arising in the homogenized medium. Moreover, multiphase models or multiphase flows equations are usually derived by using the concept of multivelocity continuum and the assumption of interpenetrating motion of the components. In a sense, this concept means that several materials are simultaneously present at each spatial point under consideration. Here we discuss another approach to multiphase models that is arisen from homogenization theory.

The homogenized coupled equations and accuracy estimate admit also a natural interpretation of the multiphase flows equations for the particular diffusion models. Each equation of such homogenized system characterizes diffusion in the domain occupied by a particular (well conducting) material, and diffusion exchange between these materials is determined by the exchange coefficients coupling the equations. Some cases of the homogenized multiphase models were derived in [1]-[3]. Special case of such models is a well-known model of parallel flows in mechanics of porous media.

1. Sandrakov G.V. Multiphase nonstationary diffusion models arising from homogenization/ G.V. Sandrakov // Computing Mathematics and Mathematical Physics - 2004. - 44, № 10. - P. 1741-1755.

2. Sandrakov G.V. Spectral properties of homogenized diffusion models in a strong inhomogeneous medium/ G.V. Sandrakov // Doklady Mathematics - 2006. - 74, № 3. - P. 815-818.

3. Sandrakov G.V. Multiphase homogenized diffusion models for problems with several parameters/ G.V. Sandrakov // Izvestiya: Mathematics - 2007. - 71, № 6. - P. 1193-1252.

Smetankina Natalia Volodymyrivna, Dr. Sci. (Tech.), Senior Researcher,
A.N. Podgorny Institute for Mechanical Engineering Problems of NAS of Ukraine, Kharkiv, Ukraine
e-mail: nsmetankina@yandex.ru;
SmetankinVolodymyrOleksandrovych, PhD (Tech.), Prof.,
Petro Vasilenko Kharkiv National Technical University of Agriculture
e-mail:vsmetankin@yandex.ru

MODELING OF ACOUSTIC FIELDS OF HYDRODYNAMIC RADIATORS WITH SOUND WAVES ATTENUATION

Smetankina N.V., Smetankin V.A.

Ultrasonic technics is widely applied to clearing of details and fluids, for example, hydrodynamic radiators [1]. However, specific conditions of technological process of clearing of wool limit ultrasound application. The present work deals with the process of vibrations of hydrodynamic radiators taking into account attenuation of sound waves.

The radiator consists of a conic-cylindrical nozzle, a reflector and resonant oscillatory system in the form of the rods located along the forming cylinder. The converter cylinder has 16 rods in width of 6 mm through 22.5 degrees. The ends of rods are rigidly fixed. The length of the cylinder is equal 126 mm, and its diameter of 37 mm. The stream from a nozzle energizes a bending vibration in the rod. Radiators are established in the cylindrical tank filled with a liquid with surface-active substances. For effective operation of a radiator it is necessary to select such geometrical and mechanical parameters that its frequency was close to frequency of the first tone of the radiator rod.

It is established that the calculated frequency of the first tone is equal 1750 Hz. It is close to the experimental value 1767 Hz. Thus, an operation of the hydrodynamic radiator is effective one.

The general equations of fluid and gas dynamics are based on such three main principles: conservation relations of masses; the law on equality between an impulse of forces and a corresponding increment of quantity of movement; the law of conservation of energy.

Theoretical and experimental researches show [2] that radiators at their immersing in a fluid on depth of 0.2–0.3 m can be observed as spherical sources of the zero order, and an efficiency of their operation in the closed areas can be estimated on magnitude of a sound pressure.

Characteristics of a sound field were defined from Euler's nonlinear equations in the form of Navier-Stokes jointly with the equation of the condition. The solution of system of the nonlinear differential equations was carried out by an iteration method.

On the first iteration it was supposed, that the radiator is replaced with equivalent system of the dot sources. The solution of the homogeneous equations is the generalized potential of a simple layer. On the found values of speeds density and pressure of the fluid is defined. The following iteration consists in calculation of the right part of the equations, construction of the common solution of the Euler's nonlinear equations system and refinement of values of density and pressure of the fluid. Process is completed at reaching of required accuracy of the solution. The system also considers attenuation of vibrations of the sound field connected with viscosity of environment.

Analysis of numerical solutions shows that the consideration of attenuation of acoustic waves significantly changes ultrasonic field parameters.

1. Suharkov O.V. Research of process emulsification in a multifrequency acoustic field // Acoustic Bulletin/ O.V.Suharkov. – 2009. – Vol. 12, N 4. – P. 57–64.

2. Physical fundamentals of ultrasonic technology / edited by L.D. Rosenberg. – Moscow: Nauka, 1970.– 688 p.

Сінчило Сергій Володимирович, кандидат фіз.-мат. наук, н.с.,
Інститут механіки ім.С.П.Тимошенко НАН України,
e-mail: svsinchilo@gmail.com;
Савельєва Катерина Володимирівна, кандидат фіз.-мат. наук, с.н.с.,
Інститут механіки ім.С.П.Тимошенко НАН України,
e-mail: ksav@hotmail.ru;
Симчук Ярослав Вікторович кандидат фіз.-мат. наук, н.с.,
Інститут механіки ім.С.П.Тимошенко НАН України,
e-mail: yar_simchuk@ukr.net;

АНАЛИЗ КВАДРАТИЧНО НЕЛІНІЙНОЇ ГІПЕРПРУЖНЬОЇ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ХВИЛІ ПРИ ТРЕТЬОМУ НАБЛИЖЕННІ

Сінчило С.В., Савельєва К.В., Симчук Я.В.

Представлені у даній доповіді результати можна вважати такими, що узагальнюють результати публікацій, оскільки в отриманих квадратично нелінійних циліндричних хвилях враховано як друге, так і третє наближення.

Розглядається циліндрична хвиля [1,2] в гіперпружньому матеріалі, деформування якого відбувається квадратично нелінійно відповідно до моделі Мурнагана. Використовується метод послідовних наближень.

Розглянемо рівняння третього наближення

$$u^{(2)}_{r,tt} - \left(v_{ph}\right)^2 \left(u^{(2)}_{r,r} + \frac{u^{(2)}_r}{r} \right)_{,r} = S\left(u^{(1)}_r, u^{(1)}_{r,r}, u^{(1)}_{r,rr}\right) \tag{1}$$

Права частина рівняння (1) представлена через функції Ханкеля та включає три складові, що включають чотири степені функції Ханкеля нульового та першого порядків та їх добутки першої, другої та третьої степені, відповідно:

$$\left(H^{(1)}_0\right)^4,\ \left(H^{(1)}_1\right)^4,\ \left(H^{(1)}_0\right)^3 H^{(1)}_1,\ H^{(1)}_0\left(H^{(1)}_1\right)^3,\ \left(H^{(1)}_0\right)^2\left(H^{(1)}_1\right)^2.$$

В рамках перших трьох наближень та прийнятих спрощень, розповсюдження циліндричної хвилі описується формулою:

$$\begin{aligned} u_r(r,t) = u^{(0)}_r(r,t) + u^{(1)}_r(r,t) + u^{(2)}_r(r,t) = u_o H^{(1)}_1(k_L r) e^{i\omega t} - \\ -\frac{1}{4} u_0^2 k_L \frac{N_1}{\lambda + 2\mu} H^{(1)}_0(k_L r) H^{(1)}_1(k_L r) e^{2i\omega t} + \\ + \frac{1}{48} u_0^4 k^3 \left(\frac{N_1}{\lambda + 2\mu}\right)^3 H^{(1)}_0(k_L r) H^{(1)}_1(k_L r) \left(\left(H^{(1)}_1(k_L r)\right)^2 - \left(H^{(1)}_0(k_L r)\right)^2 \right) e^{4i\omega t} \end{aligned} \tag{2}$$

На основі комп'ютерного моделювання хвильові ефекти в циліндричних хвилях виявляються в початковому значному впливі третьої та менше другої гармоніки, що відрізняє їх від плоских повздовжніх хвиль, де хвиля спочатку слабо відрізняється від лінійної гармонічної, далі з зростанням пройденого хвилею шляху або часу вплив другої та четвертої гармоніки створюють слабо модульовану хвилю. З часом вплив другої та третьої гармоні згасає і профіль приймає вид першого наближення.

1. Гузь А.Н., Рущицкий Я.Я., Гузь И.А. Введение в механику нанокомпозитов. – Киев: Академпериодика, 2010. – 398с.

2. Рущицький Я.Я., Цурпал С.І. Хвилі в матеріалах з мікроструктурою. – К.: Інститут механіки ім.С.П.Тимошенка, 1998. – 377с.

Ткаченко Неоніла Єрмолаївна, кандидат фіз.-мат. наук, старший науковий співробітник,
Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України
e-mail: tk.ne@ukr.net;

РУХ ДРІБНОДИСПЕРСНОЇ СУМІШІ ПІД ДІЄЮ ГАРМОНІЧНОГО ЗБУДЖЕННЯ

Ткаченко Н.Є.

Розглядається рух дрібнодисперсної суміші рідина–частинки в циліндричному резервуарі. Використовуючи канонічні рівняння руху однієї частинки, побудована математична модель такої суміші [1]. Спочатку записано рівняння Ліувілля для неконсервативної системи. Використовуючи статистичний підхід побудовано кінетичне рівняння для функції розподілу системи частинок, яка нормується на одиницю. Середні величини визначаються першими моментами від нульового наближення функції розподілу. Відмітимо, що в нашій системі, на відміну від класичної кінетичної теорії, на мікрорівні існує два параметри релаксації-параметр густини і параметр дисипації, що виникає за рахунок взаємодії між рідиною і частинками, яка враховується через самоузгоджене поле. В результаті для рідини маємо узагальнені рівняння Ейлера, які враховують взаємодію з частинками, а для густини розподілу частинок – рівняння типу рівняння Фоккера-Планка, яке залежить від руху рідини.

В початковий момент часу суміш рівномірно розподілена по резервуару. Задана початкова функція розподілу частинок. Рух суміші відбувається за рахунок гармонічного збудження в вертикальному напрямку. Основна увага приділяється руху частинок. Враховуються умови прилипання частинок до стінок. Аналітично знайдено густину розподілу частинок. Рух частинок в середній частині резервуару відрізняється від руху біля стінок. При наближені до стінок частина частинок осідає на стінки резервуара. А інша частина рухається вниз, створюючи пульсуючий параболоїд, що розпадається з часом. При цьому невелика кількість частинок досягає дна резервуару.

1. Ткаченко Н.Є., Ткаченко С.Є. Рух системи твердих частинок поблизу твердої поверхні // Збірник праць Інституту математики НАНУ. – 2010. – том 7, № 2. –С. 421-426.

Троценко Юрий Владимирович, кандидат физ.-мат. наук, старший научный сотрудник,
Институт математики НАН Украины, Киев, Украина,
e-mail: trots@imath.kiev.ua

ОСОБЕННОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ МЕТОДА РИТЦА К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ О СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЯХ ТОНКОСТЕННЫХ КУПОЛООБРАЗНЫХ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ

Троценко Ю.В.

Достаточно большое количество работ посвящено разработке аналитических и численных методов для решения задач о собственных и вынужденных колебаниях оболочек вращения. В качестве краткого обзора читателю можно порекомендовать работы [1-3].

Несмотря на привлекательность получения приближенного решения задач в аналитической форме, метод Ритца не нашел достаточного применения для решения спектральных задач теории тонкостенных оболочек. Это связано, в первую очередь, с проблемой выбора базисных функций, которые бы гарантированно обеспечивали сходимость решений, а при необходимости исследования динамической прочности - поточечную сходимость и их первых трех производных при достаточно малых значениях толщины оболочки. Это объясняется тем, что при существенном уменьшении толщины оболочки исходная задача переходит в разряд сингулярно возмущенных краевых задач, для которых характерно наличие высоких градиентов в решениях и их производных, локализованных в малой окрестности граничных точек. Аппроксимация таких решений известными конечными рядами, без учета этих особенностей, не приводит к положительному результату.

Возникает проблема разработки такого метода решения краевых задач для уравнений с параметром при старшей производной, который бы имел одинаковую скорость сходимости как при малых, так и средних его значениях. Такие методы в литературе называют равномерно сходящимися методами по параметру [4].

Настоящая работа посвящена развитию метода Ритца для построения решения спектральной задачи о свободных колебаниях куполообразных оболочек вращения, обладающего равномерной сходимостью как по малому параметру при старшей производной в исходных уравнениях, так и по независимой переменной. При этом предварительно учитывается формальная структура фундаментальных решений исходной системы уравнений для оболочек вращения в форме купола, полученная с использованием элементов аналитической теории дифференциальных уравнений с малым параметром при старших производных и уравнений с регулярной особой точкой. На этой основе построены системы базисных функций для аппроксимации искомых решений. Разработан способ формирования алгебраических уравнений в методе Ритца с использованием вариации исходного функционала, который в дальнейшем значительно упрощает процедуру программирования предложенного здесь алгоритма расчета динамических характеристик рассматриваемых оболочек.

1. Троценко В.А., Троценко Ю.В. Решение задачи о собственных колебаниях незамкнутой оболочки вращения в условиях ее сингулярного возмущения // Нелінійні коливання. - 2005. - 8, № 3. - С. 415 - 432.

2. Gavrilyuk I., Hermann M., Trotsenko V., Trotsenko Yu., Timokha A. Axisymmetric oscillations of a cupola-shaped shell. // Journal of Engineering Mathematics. - 2010. - 68. - P. 165-178.

3. Gavrilyuk I., Hermann M., Trotsenko V., Trotsenko Yu., Timokha A. Eigenoscillations of a thin-walled azimuthally closed, axially open shell of revolution. // Journal of Engineering Mathematics. - 2014. - 85. - P. 83-97.

4. Дулан Э., Миллер Дж., Шилдерс У. Равномерные численные методы решения задач с пограничным слоем. - Москва: Мир, 1983. - 200 с.

Утебаев Даулетбай, кандидат физ.-мат. наук, доцент кафедры прикладной математики и информатики Каракалпакского госуниверситета имени Бердаха.
e-mail: dutebaev_56@mail.ru
Утебаев Бахадыр Даулетбай улы, Узбекский Национальный университет им. М. Улугбека
e-mail: bakhadir1992@mail.ru
Бекимбетов Бахыт Абдибакирович, Каракалпакский государственный университет имени Бердаха
e-mail: maryo1984@mail.ru

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Утебаев Д., Утебаев Б.Д., Бекимбетов Б.А.

Как известно, для нелинейных уравнений в частных производных за исключением отдельных частных случаев, не существует общих численных методов их исследования. Один из основных трудностей построенного численного метода является доказательство его устойчивости.

Большинство уравнений параболического типа можно записать в форме

$$\partial u / \partial t = L(u),\ u(0) = u_0, \tag{1}$$

где, $L(u)$ - некоторый общего вида нелинейный дифференциальный оператор относительно пространственной переменной x. Можно привести много примеров, математические модели которых имеет вид (1). Например, процессы электронной и ионной теплопроводности в плазме, адиабатическая фильтрация газов и жидкостей в пористых средах. Диффузия нейтронов и альфа-частиц приводит к квазилинейным уравнениям теплопроводности. Кроме того, такие задачи возникают при математическом моделировании процессов химической кинетики, различного рода биохимических реакций (реакции-диффузии), конвекции-диффузии, процессов роста и миграции популяций и т. п.

Будем рассматривать задачу Коши:

$$u' + Au = f(t,u),\ u(0) = u_0,\ u' = du/dt. \tag{2}$$

Она получается при дискретизации по пространственной переменной дифференциального уравнения в частных производных параболического типа (1).

Любую двухслойную разностную схему, которая аппроксимирует задачу (2) можно записать в виде следующего разностного уравнения:

$$y_{n+1} = S_n y_n + f_n(y_n),\ \ y(0) = y_0,\ \ \ n = 0,1,\ldots. \tag{3}$$

Для нелинейного возмущения $f_n(y_n)$ требуем выполнения условия

$$\|f_n(y_n)\| \le K_n \|y_n\|^r,\ \ r > 1,\ \ f(0) = 0,\ \ \sum_{m=0}^{n-1} K_m \le M < \infty. \tag{4}$$

При этом тривиальная последовательность $y_n \equiv 0$ является решением уравнения (3).

Теорема. Пусть выполнены условия:

а) решение уравнения $y_{n+1} = S_n y_n,\ \ y(0) = y_0,\ \ n = 0,1,\ldots$ равномерно устойчиво, т.е. $\forall j \ge 0$ $(j < n)$ выполняются оценка $\|y_n\| \le M_1 \|y_j\|,\ \ M_1 > 0 - const$;

б) нелинейная часть уравнения (3) удовлетворяют условиям (4);

в) начальное возмущение y_0 достаточно мало.

Тогда тривиальное решение уравнения (3) устойчива и для ее решения справедлива априорная оценка $\|y_n\| \le \tilde{M}_1 \|y_0\|,\ \ \forall n,\ \ n = 1,2,\ldots,\ \ \tilde{M}_1 > 0 - const$.

Феньків Володимир Михайлович, аспірант, фізико-математичний факультет
Уманський державний педагогічний університет імені Павла Тичини, Умань, Україна
e-mail: fenkiv@ukr.net
Діхтяренко Юлія Володимирівна, викладач
Уманський державний педагогічний університет, Умань, Україна
e-mail: dikhtiarenko_iu@mail.ru

РОЗВИТОК ЗОНИ КРИХКОГО ПЕРЕДРУЙНУВАННЯ В ОКОЛІ ВЕРШИНИ ТРІЩИНИ, ЩО ВИХОДИТЬ У ДОВІЛЬНУ НАПРЯМКУ З КУТОВОЇ ТОЧКИ ЛАМАНОЇ МЕЖІ ПОДІЛУ ДВОХ ПРУЖНИХ СЕРЕДОВИЩ

Феньків В. М., Діхтяренко Ю. В.

В умовах плоскої деформації в рамках моделі Леонова–Панасюка–Дагдейла розглядається задача про розрахунок зони передруйнування біля вершини тріщини, що виходить з кутової точки межі поділу двох пружних середовищ у довільному напрямку. Досліджується початковий етап розвитку зони при малих рівнях навантаження, коли її розміри є значно меншими, ніж довжина тріщини та інші суттєві розміри тіла. Це дозволяє сформулювати умову на нескінченості у вигляді вимоги збігу шуканого розв’язку з розв’язком однорідної задачі теорії пружності про напружено-деформований стан біля вершини тріщини довільної орієнтації у кусково-однорідній площині з ламаною межею поділу матеріалів за відсутності зони передруйнування [1]. Останній розв'язок визначений з точністю до пов’язаних з коефіцієнтами інтенсивності напружень множників, які вважаються заданими за умовою і вносять у задачу залежність від зовнішнього навантаження.

Зона передруйнування моделюється прямою лінією розриву нормального переміщення, на якій нормальне напруження дорівнює опору матеріалу відриву. За допомогою інтегрального перетворення Мелліна задача зведена до функціонального рівняння Вінера-Хопфа, розв’язаного засобами теорії функцій комплексної змінної з урахуванням поведінки напружень біля вершин гострокінцевих концентраторів. Для визначення орієнтації зони передруйнування використано умову максимуму потенціальної енергії, накопиченої в зоні. З отриманого розв'язку виведені алгебраїчні рівняння для визначення довжини зони і напрямку її поширення та вираз для розкриття тріщини у її вершині. Виконано числове дослідження залежності параметрів зони передруйнування від навантаження, кута зламу межі поділу і пружних сталих з'єднаних матеріалів.

Досліджено вплив утворення зони передруйнування на поле напружень в околі вершини тріщини. Отримано характеристичне рівняння задачі для визначення показника сингулярності напружень. В результаті числового аналізу коренів характеристичного рівняння встановлено зниження рівня концентрації напружень після появи зони.

Використовуючи деформаційний критерій руйнування, проаналізовано умови зрушення тріщини при перетині ламаної межі поділу матеріалів у її кутовій точці. Досліджено залежність граничного навантаження від довжини тріщини і кута зламу межі поділу.

1. Дудик М., Феньків В., Хазін Г. Напружено-деформований стан в околі кутової точки ламаної межі поділу матеріалів, з якої виходить тріщина // Механіка руйнування матеріалів і міцність конструкцій: збірник наукових праць 5-ї Міжнародної конференції (24-27 червня 2014 р., Львів) / Під заг. ред. В.В. Панасюка. – Львів: Фізико-механічний інститут ім. Г.В. Карпенка НАН України, 2014. – С. 848-852.

Хома Іван Юрійович, докторфіз.-мат. наук, провідний науковий співробітник,
Інститут механіки імені С.П. Тимошенка, Київ, Україна,
e-mail: yuri-khoma@ukr.net

ПРО РОЗВ'ЯЗОК РІВНЯНЬ РІВНОВАГИ ЕЛЕКТРОПРУЖНОГО ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ІЗОТРОПНОГО ШАРУ ПРИ ЗМІШАНИХ УМОВАХ НА ТОРЦЯХ

Хома І.Ю.

Викладено метод побудови загального аналітичного розв'язку рівнянь рівноваги електропружного трансверсально-ізотропного шару при змішаних граничних умовах на плоских гранях. Вважаємо, що на граничних поверхнях задано однорідні умови у вигляді лінійної комбінації дотичних напружень, нормального переміщення і електричної індукції. В основу розв'язку покладено метод розкладення шуканих функцій в ряди Фур'є за поліномами Лежандра координати товщини [1, 2]. Відносно коефіцієнтів розкладу механічних переміщень $u_j^{(k)}(x_1,x_2)$ та діелектричного потенціалу $\Phi^{(k)}(x_1,x_2)$, як функцій двох незалежних змінних, побудовано систему диференціальних рівнянь і відповідні граничні умови. За структурою система розпадається на дві незалежні групи рівнянь, які описують симетричне і кососиметричне (відносно серединної площини S) деформування шару. При симетричному деформуванні система рівнянь в комплексній формі має вигляд

$$c_{66}\Delta u_+^{(2k)}+2(c_{12}+c_{66})\partial_{\bar z}\theta^{(2k)}-(4k+1)h^{-1}\Big[2c_*c_{44}\partial_{\bar z}u_3^{(2k-1)}+$$
$$+2\sum_{s=1}^{n}\alpha_{2s}^{(k)}\partial_{\bar z}\Phi^{(2s-1)}-c_{44}h^{-1}\sum_{s=1}^{n}\beta_{2s}^{(k)}u_+^{(2s)}\Big]=0;\quad c_{44}\Delta\left(u_3^{(2k-1)}-u_3^{(2k-3)}\right)+e_{15}\Delta\Phi^{(2k-1)}+$$
$$+(4k-1)h^{-1}\left[c_*c_{44}\sum_{s=k}^{n}\theta^{(2s)}-c_{33}h^{-1}\sum_{s=k}^{n}(4s+1)u_3^{(2s-1)}-e_{33}h^{-1}\sum_{s=k}^{n}(s-k)(2s+2k-1)\Phi^{(2s-1)}\right]=0;$$
$$\varepsilon_{11}\Delta\Phi^{(2s-1)}-e_{15}\Delta\left(u_3^{(2k-1)}-u_3^{(2k-3)}\right)+$$
$$+(4k-1)h^{-1}\left[\sum_{s=0}^{n}\alpha_{2s}^{(k)}\theta^{(2s)}+e_{33}h^{-1}\sum_{s=k}^{n}(4s+1)u_3^{(2s-1)}-\varepsilon_{33}h^{-1}\sum_{s=1}^{n}\alpha_{2s}^{(k)}\Phi^{(2s-1)}\right]=0\ \left(k=\overline{1,n}\right),\quad(1)$$

де Δ – оператор Лапласа, $u_+^{(2k)}=u_1^{(2k)}+iu_2^{(2k)}$, $\theta^{(2k)}=\partial_z u_+^{(2k)}+\partial_{\bar z}\bar u_+^{(2k)}$, $c_{11},c_{12},\dots c_{66}$ – модулі пружності, e_{15},e_{31},e_{33} – п'єзомодулі, $\varepsilon_{11},\varepsilon_{33}$ – компоненти діелектричної проникливості матеріалу, $\alpha_{2s-1}^{(k)},\beta_{2s}^{(k)}$ – абсолютні константи

$$\lambda_{2s-1}^{(k)}=\begin{cases}-e_{15}, 1\le s\le k,\\ e_{31}, k<s\le n;\end{cases}\quad \lambda_{2s}^{(k)}=\begin{cases}e_{31}, 0\le s<k,\\ -e_{15}, k\le s\le n.\end{cases}\qquad(2)$$

Викладено метод побудови загального розв'язку даної системи, який визначається голоморфними і метагармонічними функціями.

1. Векуа И.Н. Теория тонких пологих оболочек переменной толщины // Тр. Тбилис. мат. ин-та, 1965. – Т. 30. – С. 3-103.

2. Khoma I.Yu. Representation of the solution of the equilibrium equations for non-thin transversely isotropic plates // J. of Math. Sciences. – 2000. – 101, № 6. – P.3577–3584.

Трач Володимир Мирославович, доктортехнічних наук, професор,
Національний університет водного господарства та природокористування, Рівне, Україна,
e-mail: trach-vm@ukr;
Хоружий Микола Миколайович,асистент,
Національний університет водного господарства та природокористування, Рівне, Україна,
e-mail: xopmm@ukr.net

СТІЙКІСТЬ НЕТОНКИХ АНІЗОТРОПНИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК ІЗ ВОЛОКНИСТИХ КОМПОЗИТІВ ПІД ДІЄЮ ЗОВНІШНЬОГО ТИСКУ

Трач В.М., Хоружий М.М.

Сучасний рівень розвитку техніки викликає необхідність створення конструкцій з нових матеріалів, що володіють особливими, не присутніми природним матеріалам властивостями. До таких матеріалів відносяться композити, що можуть представляти собою відносно піддатливу матрицю, армовану високоміцними та високомодульними волокнами.

Питання стійкості тонких анізотропних оболонок розглянуте в роботах багатьох вчених. Найбільш ґрунтовно воно висвітлене в монографії [1]. В роботі розглянуті нетонкі анізотропні багатошарові оболонки обертання із волокнистих композитів, що зібрані за товщиною в єдиний пакет, шари в якому працюють без відриву та проковзування. Як відомо, достовірний розрахунок таких оболонок можливий при використанні одного з варіантів уточнених теорій. Найбільш вживаною є теорія типу Тимошенко. Скористаємось нею для розрахунків анізотропних оболонок, розглядуваного типу.

Для побудови рівнянь, за допомогою яких визначається критичний стан оболонок, пов'язаний з явищем біфуркації, використана канонічна система рівнянь нелінійного деформування симетрично завантажених нетонких анізотропних оболонок. Рівняння, що описують осесиметричну деформацію анізотропних оболонок представлені в узагальненому вигляді для основної та суміжної траєкторії деформування. Користуючись поняттям похідної Фреше, у відповідності з критерієм Ейлера та враховуючи, що навантаження основного і суміжного станів однакові, отримано лінеаризовану систему рівнянь відносно приростів функцій при біфуркації.

Розглядувані оболонки замкнуті, тому розв’язувальні функції періодичні за коловою координатою. Для приведення двовимірної задачі стійкості до одномірної розв’язувальні функції представлені у вигляді комплексних рядів Фур’є за коловою координатою. В результаті перетворень отримано систему звичайних однорідних диференціальних рівнянь у нормальній формі Коші із змінними коефіцієнтами та однорідними граничними умовами.

Розв’язок такої крайової задачі реалізований за використання чисельного методу дискретної ортогоналізації. Чисельна методика розрахунку поставленої задачі, що базується на методі Кутта-Мерсона з ортогоналізацією векторів розв’язків в окремих точках, реалізована у вигляді пакету програм для ПК.

Для представлення запропонованої методики розглянута задача про розрахунок стійкості шарнірно закріпленої циліндричної оболонки, що виготовлена із склопластика з одношаровою намоткою. До оболонки прикладений зовнішній рівномірно розподілений тиск. Результати розрахунків представлені у вигляді графіків, що ілюструють залежність величини критичного значення зовнішнього тиску від зміни кута намотки композиту та товщини оболонки.

1. Баженов В.А. Нелінійне деформування, стійкість і закритична поведінка анізотропних оболонок / Баженов В.А., Семенюк М.П., Трач В.М. // – К.: Каравела, 2010. – 352 с.

Рущицький Ярема Ярославович, докторфіз.-мат. наук, професор,
Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, Київ, Україна,
e-mail: rushch@inmech.kiev.ua;
Хотенко Олена Олександрівна, кандидат фіз.-мат. наук, н.с. відділу реології,
Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, Київ, Україна,
e-mail: h.khotenko@gmail.com;
Хотенко Ірина Миколаївна, кандидат фіз.-мат. наук, с.н.с. відділу реології,
Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, Київ, Україна,
e-mail: i.khotenko@gmail.com

ДО АНАЛІЗУ НЕЛІНІЙНОГО РІВНЯННЯ РЕЛЕЯ

Рущицький Я.Я., Хотенко О.О., Хотенко І.М.

Предметом аналізу є гармонічна поверхнева хвиля Релея, яка поширюється вздовж границі ізотропного півпростору, гіперпружне деформування якого описується п‘ятиконстантним нелінійно пружним потенціалом Мурнагана.

В попередніх роботах авторів [1,2] було проведено аналітичне і числове дослідження поверхневої хвилі Релея, основане на застосуванні методу послідовних наближень. Цей метод не враховує можливості зміни швидкості хвилі у нелінійному процесі поширення хвилі. Однак отримане в [1,2] нелінійне рівняння Релея (рівняння для визначення швидкості хвилі) свідчило про явну залежність швидкості хвилі від її амплітуди. На жаль, це рівняння залишилося по за увагою авторів [1,2].

У даній доповіді пропонуються результати первинного аналізу вказаного рівняння, коли нелінійне рівняння спрощується через врахування лише першого з трьох нелінійних доданків, що можливо лише за певних обмежень на величину початкової амплітуди хвилі. Таке рівняння має вигляд

$$-l_1 l_4 + l_2 l_3 - \left[\frac{l_3^{\,2} n_2^{\,2} + l_1^{\,2} n_5^{\,2} - 2 l_1 l_3 n_2 n_5}{l_2 n_5 - l_4 n_2} - \frac{l_4 n_1 n_2 + l_2 n_2 n_4 - 2 l_2 n_1 n_5}{n_2} \right] A_\varphi = 0, \qquad (1)$$

де l_i, n_j – величини, що залежать від параметрів матеріалу (пружних сталих і густини) і швидкості і фази хвилі.

Аналіз рівняння (1) проведено чисельно для сталі Hecla17. Досліджувалося відхилення швидкості хвилі від її лінійного значення $c_R = 2837$ м/с (за формулою Вікторова 2849 м/с). Така задача є трипараметричною і тому при числовому аналізі фіксувалися значення частоти ω та фази $k_R x - \omega t$ і сканувалося значення початкової амплітуди A_φ.

Побудовані графіки залежності швидкості хвилі Релея від значень початкової амплітуди для фіксованих частот уможливили теоретичне спостереження певних нових нелінійних хвильових ефектів.

Один з виявлених нових нелінійних ефектів полягає в тому, що при збільшенні початкової амплітуди або частоти, швидкість хвилі Релея зменшується. При цьому швидкість хвилі Релея обмежується зверху максимально можливим значенням – швидкістю лінійної хвилі.

1. Рущицкий Я.Я., Хотенко Е.А. О волне Рэлея в квадратично нелинейном упругом материале (модель Мурнагана) // Прикладная механика – 2011. – 47, N 3. – С. 50 – 58.
2. Хотенко О.О. До теорії квадратично нелінійних хвиль Релея / Рукопис. Дис.на здоб. наук. ступ. канд.. фіз.-мат. наук за спеціальністю 01.02.04 – механіка деф. тв. тіла. – Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, Київ, 2014 р. – 185 с.

Шпачук Владимир Петрович, доктор техн. наук, профессор,
Харьковский национальныйуниверситет городского хозяйства им. А.Н. Бекетова, Харьков, Украина,
e-mail: shpachukvp@mail.ru;
Чупрынин Александр Алексеевич, кандидаттехн. наук, доцент,
Харьковский национальныйуниверситет городского хозяйства им. А.Н. Бекетова, Харьков, Украина,
e-mail: sasha.chupr@gmail.com;
Гудзловенко Людмила Александровна, аспирант кафедры теоретической и строительной механики,
Харьковский национальный университет городского хозяйства им. А.Н. Бекетова, Харьков, Украина

К ЗАДАЧЕ МОДЕЛИРОВАНИЯ УДАРНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ В ДИСКРЕТНО-КОНТИНУАЛЬНОЙ СИСТЕМЕ

Шпачук В.П., Чупрынин А.А., Гудзловенко Л.А.

Исследования показывают, что наиболее нагруженной зоной трамвайного пути оказываются стыковые неровности, в которых силы взаимодействия в механическом комплексе "двумерная дискретная упруго-диссипативная система – континуальная система в виде неразрезной многопролётной балки на 23 упругих опорах" изменяются как во времени, так и по направлению. При этом рельс, как составляющая дискретно-континуальной системы "вагон - колесная пара - рельсовый путь" получает большие динамические нагрузки ударного типа. В результате прогибы рельса и деформационные характеристики балластного слоя под рельсовыми опорами являются функцией работы рельсового пути под движущимся вагоном и регламентируют технический ресурс пути, а также длительность его эксплуатации.

Приведены результаты исследования ударного взаимодействия в анализируемом механическом комплексе на базе динамической модели, учитывающей рассеивание энергии в опорах балки, а также ее угол сдвига:

$$\begin{cases} k'\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\dfrac{\partial^2 w(t,x)}{\partial x^2}-\dfrac{\partial \psi(t,x)}{\partial x}\right)+\dfrac{\rho F}{EJ}\cdot\dfrac{\partial^2 w(t,x)}{\partial t^2}= \\ =\dfrac{c_1(y_2-w(t,0))\delta(0)}{EJ}+\dfrac{b_1}{EJ}\left(\dfrac{dy_2}{dt}-\dfrac{\partial w(t,0)}{\partial t}\right)\delta(0)+ \\ +\sum\limits_{i=1}^{23}\dfrac{b_2}{EJ}\dfrac{\partial w(t,l_i)}{\partial t}\delta(x-l_i)-\sum\limits_{i=1}^{23}\dfrac{c_2 w(t,l_i)\delta(x-l_i)}{EJ}-\dfrac{m_1}{EJ}\dfrac{\partial^2 w(t,0)}{\partial t^2}\delta(0); \\ EJ\dfrac{\partial^2\psi(t,x)}{\partial x^2}+k'FG\left(\dfrac{\partial w(t,x)}{\partial x}-\psi(t,x)\right)=\rho J\dfrac{\partial^2\psi(t,x)}{\partial t^2}; \\ m_2\dfrac{d^2 y_2}{dt^2}+c_1(y_2-w(t,l'))+b_1\left(\dfrac{dy_2}{dt}-\dfrac{\partial w(t,l')}{\partial t}\right)=0, \end{cases}$$

где w,ψ, y_2 – прогиб, угол сдвига рельса и вертикальное перемещение конструктивного элемента дискретной системы соответственно; $m_{1,2}$, $c_{1,2}$, $b_{1,2}$, E, J, G,k', ρ, F, l',l_i – механические и геометрические характеристики анализируемой дискретно-континуальной системы; $\delta(x)$- импульсная функция.

Динамические характеристики взаимодействия проанализированы на фазе возрастания прогибов под первой опорой и определяются с учётом параметров реальных объектов – вагона трамвая и рельсового пути в зоне изолированной стыковой неровности.

Полученные результаты используются на практике для расчета параметров динамического взаимодействия вагона и рельсового пути за пределами стыковой неровности, а также при численном анализе и оптимизации эксплуатационных и конструктивных параметров рассмотренной дискретно-континуальной системы.

Щепкіна Ярина Ігорівна, студентка 5 курсу, фізико-математичний факультет
Уманський державнийпедагогічний університет, Умань, Україна
e-mail: yarina5389@gmail.com;
Декарчук Марина Вадимівна, кандидат пед. наук, доцент
Уманський державнийпедагогічний університет, Умань, Україна
e-mail: shuter@meta.ua;
Дудик Михайло Володимирович, кандидат фіз.-мат. наук, доцент
Уманський державнийпедагогічний університет, Умань, Україна
e-mail: dudik_m@hotmail.com

ПРО МОДЕЛЬ МІЖФАЗНОЇ ТРІЩИНИ З ДИСЛОКАЦІЙНО-ПОДІБНОЮ МЕЖЕЮ ПОДІЛУ МАТЕРІАЛІВ

Щепкіна Я.І., Декарчук М.В.,Дудик М.В.

Тріщини на межі поділу різних матеріалів є поширеним дефектом у будові композитів, клеєних і зварних з'єднань тощо, який може бути причиною їх руйнувань. Досконалої і завершеної теорії міжфазних тріщин досі не створено. Класична модель відкритої тріщини передбачає фізично некоректні просторові осциляції її берегів біля вершини. Модель М.Комніноу тріщини з частковим контактом берегів при розтягу приводить до екстремально малих розмірів області контакту. Тому існує потреба створення альтернативних моделей міжфазних тріщин, вільних від подібних недоліків. Один з напрямків розв’язання цієї проблеми полягає в урахуванні пружних властивостей міжфазного з'єднувального шару при формулюванні граничних умов на межі поділу матеріалів.

В даній роботі побудовано нову модель міжфазної тріщини у кусково-однорідному тілі, особливість якої полягає у використанні неідеальних умов контакту з'єднаних матеріалів на межі поділу. Береги тріщини вважаються вільними від напружень, а з'єднувальний шар замінено поверхнею розриву переміщень з дислокаційно-подібними умовами, в яких передбачається пряма пропорційність переміщень обох матеріалів на межі поділу матеріалів [1]. Сталі коефіцієнти пропорційності вважаються заданими пружними характеристиками міжфазного з'єднання.

В рамках дислокаційно-подібної моделі міфжазного з'єднання сформульовано однорідну крайову задачу теорії пружності про визначення локального поля напружень в околі вершини міжфазної тріщини в умовах плоскої деформації, яку розв’язано з використанням формул Вігхардта-Вільямса для клина [2, 3]. Знайдено умови існування нетривіального розв'язку задачі. Отримано аналітичний вираз для показника сингулярності напружень біля вершини тріщини. Виконано аналіз умов, за яких показник сингулярності є дійсним і відсутні фізично некоректні просторові осциляції переміщень берегів тріщини біля її вершини. Показано також, що у певному інтервалі пружних параметрів з'єднаних матеріалів коливальний характер переміщень берегів все ж таки залишається, і тому запропонована модель не розв’язує в повній мірі проблему осциляцій. Виконано числові розрахунки напружено-деформованого стану в околі вершини тріщини та здійснено аналіз їх результатів.

1. Yu H.Y. A new dislocation-like model for imperfect interfaces and their effect on load transfer / H.Y. Yu // Composites.– 1998. – V. 29A. – P. 1057–1062.

2. Wieghardt K. Über das Spalten und Zerreißen elastischer Körper / K. Wieghardt // Zeitshr. für Math. und Phys. – 1907. – Bd. 55, №1/2. – S. 60-103.

3. Williams M.L. Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extension / M.L. Williams // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1952. – V. 19, №4. – P. 526 – 535.

Рущицький Ярема Ярославович, докторфіз.-мат.наук, професор,
Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, Київ, Україна,
e-mail: rushch@inmech.kiev.ua;
Хотенко Олена Олександрівна, кандидат фіз.-мат. наук, н.с. відділу реології,
Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, Київ, Україна,
e-mail: h.khotenko@gmail.com;
Юрчук Василь Миколайович, аспірант відділу реології,
Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, Київ, Україна,
e-mail: vasil_2008@ukr.net

ДО ТЕОРІЇ ПООДИНОКОЇ ПОВЕРХНЕВОЇ ХВИЛІ РЕЛЕЯ

Рущицький Я.Я., Хотенко О.О., Юрчук В.М.

Предметом аналізу є поодинока поверхнева хвиля Релея, яка поширюється вздовж границі ізотропного лінійно пружного півпростору. У такій задачі про поширення хвилі Релея постановка і метод розв'язування є класичними, однак некласичною є сама хвиля, оскільки вона вже не є гармонічною. Поодинока хвиля означається у механіці як імпульс, що поширюється у просторі і має форму, локалізовану в просторі (звичайно у вигляді одного або більше горбів). Часто поодиноку хвилю ототожнюють з солітоном. Однак коректно називати солітоном поодиноку хвилю зі стійким профілем і ще рядом особливих властивостей.

У даному повідомленні профіль поодинокої хвилі заданий математично як дзвіноподіб- на функція. Більш докладно поодинокі хвилі описані в Вікіпедії (також певна інформація про плоскі поодинокі хвилі є в монографії [1]).

Отже, задача описується класичними рівняннями

$$\rho\ddot{u}_1-(\lambda+2\mu)u_{1,11}-(\lambda+\mu)u_{3,13}-\mu u_{1,33}=0.$$
$$\rho\ddot{u}_3-(\lambda+2\mu)u_{3,33}-(\lambda+\mu)u_{1,13}-\mu u_{3,11}=0,$$

які є взаємозв'язаними, і тому для їх розщеплення звичайно застосовують потенціали Кельві-на $u_1=\varphi_{,1}+\psi_{,3}, u_3=\varphi_{,3}-\psi_{,1}$. Тоді щодо потенціалів отримуються класичні хвильові рівняння

$$\ddot{\varphi}-(v_1)^2(\varphi_{,11}+\varphi_{,33})=0,\ \ddot{\psi}-(v_3)^2(\psi_{,11}+\psi_{,33})=0,\ (v_1)^2=\left[(\lambda+2\mu)/\rho\right],(v_3)^2=\left[\mu/\rho\right]\ .$$

Далі припускається, що затухання поверхневої поодинокої хвилі відбувається за експоненціальним законом (подібно до класичного випадку), але (на відміну від класичного випадку) вважається, що початковий профіль хвилі є не гармонічним, а дзвіноподібним

$$\varphi(x_1,x_3,t)=A_\varphi e^{-\left(a_\varphi(x_1-v_Rt)\right)^2}e^{-s_\varphi x_3},\ \psi(x_1,x_3,t)=A_\psi e^{-\left(a_\psi(x_1-v_Rt)\right)^2}e^{-s_\psi x_3}.$$

У цьому випадку дзвіноподібна функція вже повинна задовольняти не хвильове рівняння, а лінійне рівняння Кляйна-Гордона [1]. Тому для коефіцієнта затухання хвилі отримуєть- ся вираз, який свідчить, що ця хвиля є простою хвилею – її параметри на є сталими і вже залежать від фази хвилі $\sigma_{\varphi(\psi)}=a_{\varphi(\psi)}(x_1-v_Rt)$

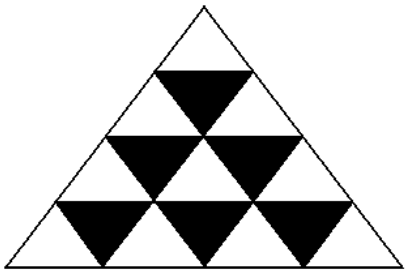
$$s_\varphi=a_\varphi\sqrt{4\sigma_\varphi{}^2-2}\sqrt{(v_R/v_1)^2-1},\ \ s_\psi=a_\psi\sqrt{4\sigma_\psi{}^2-2}\sqrt{(v_R/v_1)^2-1}.$$

Таким чином, поодинока хвиля може затухати за експоненціальним законом, але це затухання буде різним при різних значеннях фази хвилі (в різних точках підошви хвилі затухання буде різним). Таке ж явище матиме місце і при поширенні хвилі щодо швидкості хвилі.

1. Рущицький Я.Я., Цурпал С.І. Хвилі в матеріалах з мікроструктурою. Київ: Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАН України, 1997. – 377 с.

DYNAMICAL SYSTEMS MODELLING

AND STABILITY INVESTIGATION



MODELLING
&
STABILITY

Section 4

METHOD OF CONTROL AND COMPLEX SYSTEMS RESEARCH

Chikrii Greta Tholakovna, Dr. of Phys.-Math. Sci., Leading Scientific Researcher
V.M. Glushkov Institute of Cybernetics, NAS of Ukraine, Kiev, Ukraine
e-mail: g.chikrii@gmail.com

TIME DILATATION APPROACH TO ANALYZE EVOLUTIONARY GAMES

G.Ts. Chikrii

Presentation is devoted to extension of the time dilatation approach [1], developed for analysis of the linear differential games, to the evolutionary games for which the analog of Pontryagin's condition fails. Let a trajectory of conflict-controlled process be presented in a form

$$z(t)=g(t)+\int_{t_0}^{t}\left(f_1(t,\theta,u(\theta))-f_2(t,\theta,v(\theta))\right)d\theta,\ t\in[t_0,+\infty), \qquad (1)$$

$z(t)\in R^n$, $g(t), g:[t_0,+\infty)\to R^n$, is continuous function, $f_1(t,\theta,u)$, $f_1:\Delta(t_0)\times U\to R^n$, $f_2(t,\theta,u)$, $f_2:\Delta(t_0)\times V\to R^n$, $\Delta(t_0)=\{(t,\theta):0\le t_0<\theta\le t\le+\infty\}$, are functions, continuous in u and v, respectively, $U\in K(R^n), V\in K(R^n)$. Presentation (1) encompasses a wide range of processes described by functional-differential equations. By admissible controls of the pursuer (u) and the evader (v) are meant Lebesgue measurable functions $u(\theta)$, $v(\theta)$, $t_0<\theta\le+\infty$, taking their values in the compacts U and V respectively. The terminal set M_* is given in a cylindrical form: $M_*=M_0+M$, M_0 – linear subspace of R^n, $M\in coK(L)$, $L=M_0^{\perp}$, $g(t_0)\notin M_*$.

The problem is analyzed from the pursuer's point of view which goal is to steer a trajectory of object (1) to M_* that is to achieve $\pi z(t)\in M$, $t<+\infty$, π is an operator of orthogonal projection, $\pi:R^n\to L$, under arbitrary admissible evader's controls.

Definition. By function of time dilatation is meant a non-negative, monotonically increasing function $I(t)$, $t\in[t_0,+\infty)$, $I(0)=0$, $I(t)>t$, $t>0$, which may have no more than countable number of discontinuities, absolutely continuous on the intervals of its continuity and such that $\sup_{t\in[0,+\infty)\setminus\Delta}\dot{I}(t)<+\infty$, where Δ is the set of discontinuity and non-differentiability points of $I(t)$.

Condition. There exists a time dilatation function $I(t)$, such that the set-valued mapping

$$W(t,\theta)=\pi f_1(t,t_0+I(t)-\theta,U)\dot{-}\dot{I}(\theta)\pi f_2(t,t_0+I(t)-I(\theta),V)$$

has non-empty images for all $(t,\theta)\in\Delta(t_0)$.

Theorem. Let for the evolutionary game (1) with the terminal set M_* Condition hold and for given initial state $g(t_0)$ there exists a finite time t_1,

$$t_1=t_1(g(t_0))=\min\left\{t\ge t_0:\pi\left(g(t_0+I(t))+\int_{t_0}^{t_0+I(t)-t}f_1(t,\theta,U)d\theta\right)\cap\left(M-\int_{t0}^{t}W_1(\theta)d\theta\right)\ne\varnothing\right\}. \qquad (2)$$

Then the pursuer can bring a trajectory of (1) to the terminal set M_* at the instant $t_0+I(t_1)$.

To this end, at the moment t_0 the pursuer applies its control on all half-interval $[t_0,t_0+\tau_0)$, $\tau_0=I(t_1)-t_1$ and on $[t_0+\tau_0,t_0+I(t_1))$, the pursuer constructs its control on the basis of the evader's control at the moment of time on $I(t_1-\theta)-(t_1-\theta)$ earlier. Both controls are found from the assumption (2) of the theorem on the basis of the Filippov– Castaing theorem on measurable choice.

1. Chikrii G.Ts. Using effect of information delay in differential pursuit games / Cybernetics and System Analysis. – 2007. – V. 43, N. 2. P. 233 – 245 (in Russian p. 90 – 105).

Diblik Josef, prof. RNDr., DrSc.,
Brno University of Technology, Brno, Czech Republic,
e-mail: diblik@feec.vutbr.cz;
Demchenko Hanna, Mgr., Faculty of Electrical Engineering and Communication,
Brno University of Technology, Brno, Czech Republic,
e-mail: xdemch02@stud.feec.vutbr.cz;
Khusainov Denis Yahevich, Prof., DrSc.,
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine,
e-mail: khusainov@unicyb.kiev.ua;

OPTIMAL CONTROL BY LYAPUNOV'S DIRECT METHOD

Diblik J., Demchenko H., Khusainov D.Ya.

The following optimal stabilization problem is formulated in [1, p. 479]: to find a control function $u = u_0(t)$ ensuring the asymptotic stability of non-perturbed motion $x(t) \equiv 0$ of a control system and, simultaneously, minimizing the integral quality criterion $I[u(t)] = \int_{t_0}^{\infty} \omega(t, x(t), u(t))dt.$

Optimality conditions were formulated and proved in [1, pp. 485-488]. In this paper, we consider a control system $\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + bu(x), A \in R^{n\times n}, b \in R^n, x(t) \in R^n, u(t) \in R^1.$

We need to find a control function $u = u_0(t)$ for which the system is asymptotically stable and a quadratic quality criterion $I[x(t), u(x(t))] = \int_0^{\infty} \left\{ x^T(t)Cx(t) + du^2(x(t)) \right\} dt$ has a minimum value. Here, $C \in R^{n\times n}$ is a symmetric, positive definite matrix and $d > 0$. A solution of the problem is searched by the Lyapunov functions method. The Lyapunov function V is taken as the quadratic form $V(x) = x^T Hx$ with a positive symmetric constant matrix H. We derived that $u_0(x(t)) = -\frac{1}{d}\left[b^T Hx(t) + x^T(t)Hb \right].$

Consider a control system $\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(x), A \in R^{n\times n}, B \in R^{n\times m}, x(t) \in R^n, u(t) \in R^m.$

We need to find a control function $u = u_0(t)$ for which the system is asymptotically stable and an integral quality criterion $I[x(t), u(x(t))] = \int_0^{\infty} \left\{ x^T(t)Cx(t) + u^T(x(t)Du(x(t)) \right\} dt$ has a minimum value. Here, $D = \mathrm{diag}\{d_j\}$, $d_j > 0$, $j = \overline{1,m}$ is a diagonal matrix. Let b_j, $j = \overline{1,m}$ be the column vectors of the matrix B, and h_i, $i = \overline{1,n}$ be the column vectors of the matrix H. Then $u_0(x) = (u_{10}(x), u_{20}(x), ..., u_{m0}(x))^T, u_{j0}(x) = -\frac{2}{d_{jj}}(h_1^T x_1 + h_2^T x_2 + ... + h_n^T x_n)b_j, j = \overline{1,m}.$

Consider a system, described by the equations with delay

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), x(t-\tau), u(x)), x(t) \in R^n, u(t) \in R^m, t \geqslant t_0, \tau > 0, \qquad (1)$$

$x(t) = \varphi(t)$, $t_0 - \tau \leqslant t \leqslant t_0$. We need to find a control function $u = u_0(x(t))$ such that the system (1) is asymptotically stable and the integral $I[x(t), u(x(t))] = \int_{t_0}^{\infty} \omega(x(t), x(t-\tau), u(x(t)))dt$ has a minimum value. We assume that $\omega(x, y, u)$ is non-negative definite.

1. Malkin I.G.: Theory of Stability of Motion. - M.: Nauka publisher, 1966. - 530 p.

Diblik Josef, prof. RNDr., DrSc.,
Brno University of Technology, Brno, Czech Republic,
e-mail: diblik@feec.vutbr.cz;
Baštinec Jaromr, doc. RNDr., CSc.,
Brno University of Technology, Brno, Czech Republic,
e-mail: bastinec@feec.vutbr.cz;
Šafarik Jan, Mgr.,
Brno University of Technology, Brno, Czech Republic,
e-mail: xsafar19@stud.feec.vutbr.cz;
Sirenko A.S., Mgr.
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine,
e-mail: sandrew@online.ua;

EXPONENTIAL STABILITY OF LINEAR DISCRETE SYSTEMS WITH CONSTANT COEFFICIENTS AND SINGLE DELAY

Diblik J., Baštinec J., Šafarik J., Sirenko A.S.

The exponential stability and exponential estimation of the norm of solutions to a linear system of difference equations with with constant coefficients and single delay

$$x(k+1) = Ax(k) + Bx(k-m), \quad k = 0,1,\ldots \tag{1}$$

where A, B are $n\times n$ constant matrices, $x = (x_1,\ldots,x_n)^T : \{-m,-0,1,\ldots\} \to \mathbb{R}^n$, and $m \in \mathbb{N}$ are investigated.

The Cauchy problem for the system (1) is defined by the state of the system on the whole interval of the solutions' previous history $x(k) = x_k, k = -m,-m+1,\ldots,0$ where $x_k \in \mathbb{R}$.

Denote by $\lambda_{\max}(A)$, $\lambda_{\min}(A)$ the maximum and minimum eigenvalues of a positive definite symmetric matrix A. Also, we define $\varphi(A) := \lambda_{\max}(A)/\lambda_{\min}(A)$. For an arbitrary matrix B, we use the matrix norm $|B| = \sqrt{\lambda_{\max}(B^T B)}$, and for vectors $x = (x_1,\ldots,x_n)^T$, the induced vector norm $|x| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$.

A trivial solution $x(k) = 0$, $k = -m,-m+1,\ldots$ of (1) is Lyapunov stable if, for arbitrary $\varepsilon > 0$, there exists $\delta(\varepsilon) > 0$ such that, for any other solution $x(k)$, we have $|x(k)| < \varepsilon$ for $k = 0,1,\ldots$, and $\|x(0)\|_m < \delta(\varepsilon)$ where $\|x(0)\|_m := \max\{|x(i)|, i = -m,-m+1,\ldots,0\}$. If, in addition $\lim_{k\to+\infty} |x(k)| = 0$, the trivial solution is called asymptotic stable. The trivial solution of system (1) is called Lyapunov exponentially stable if there exist constants $N > 0$ and $\theta \in (0,1)$ such that $|x(k)| \le N \|x(0)\|_m \theta^k, k = 1,2,\ldots$.

In the investigation of stability of linear discrete equations, an important role is played by what is called the Lyapunov equation

$$A^T HA - H = -C \tag{2}$$

where A is a given $n\times n$ matrix and H, C are $n\times n$ matrices, naturally arising when quadratic Lyapunov function $V(x) = x^T Hx$ is utilized.

Sufficient conditions for exponential stability of (1) and an estimate of solutions are given in the following theorem.

Theorem 1. Let $|A| + |B| > 0$, $\rho(A) < 1$, C be a fixed positive definite matrix, matrix H solves the corresponding Lyapunov matrix equation (2), and $L_1(H) > 0$, $L_1(H) - L_2(H) < \lambda_{\max}(H) - \lambda_{\min}(H)$, where $L_1(H) = \lambda_{\max}(H) - \lambda_{\min}(C) + |A^T HB|$,

$$L_2(H) = \lambda_{\min}(H) - \varphi(H)\left[|A^T HB| + |B^T HB|\right].$$

Then, the system with delay (1) is exponentially stable and, for an arbitrary solution $x(k)$, the estimate

$$|x(k)| \le \sqrt{\varphi(H)}\,\|x(0)\|_m\,\Theta^{k/2(m+1)}(H),\ k \ge 0$$

holds where

$$0 < \Theta(H) := \frac{1}{\lambda_{\max}(H)}\left[L_1(H) - L_2(H) + \lambda_{\min}(H)\right] < 1.$$

1. A.S. Bychkov, D.Ya. Khusainov: *Exponential convergence estimates for delay difference systems*, Differ. Equ. 38, 9, 2002, 1368-1370; translation from Differ. Uravn. 38, 9, 2002, 1285-1287.

2. J. Čermák, J. Jánský: *Stability switches in linear delay difference equations*, Appl. Math. Comput. 243 (2014) 755-766.

3. E. Kaslik: *Stability results for a class of difference systems with delay*, Adv. Difference Equ. 2009 (2009), Article ID 938492, 1-13.

4. M.M. Kipnis, R.M. Nigmatullin: *Stability of the trinomial linear difference equations with two delays*, Autom. Remote Control 65 (11) (2004) 1710-1723.

5. S.A. Kuruklis: *The asymptotic stability of* $x_{n+1} - ax_n + bx_{n-k} = 0$, J. Math. Anal. Appl. 188 (1994) 719-731.

Kopets Miroslav Michajlovich , Candidate of Physics and Mathematics Sciences, Associate Professor
National Technical University of Ukraine "Kyiv polytechnic institute", Kyiv, Ukraine
e-mail: optimal201214@yandex.ua

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ТЕПЛОВЫМ ПРОЦЕССОМ С ОСЕВОЙСИММЕТРИЕЙ

М. М. Копец

Пусть управляемый процесс описывается уравнением с частными производными

$$\frac{\partial z(t,r)}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 z(t,r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial z(t,r)}{\partial r}\right) + u(t,r), \quad t_0 \le t \le t_1,\ 0 \le r \le R. \tag{1}$$

Начальное условие и краевые условия для уравнения (1) имеют вид

$$z(t_0,r) = f(r),\ |z(t,0)| \prec \infty,\ z(t,R) = 0. \tag{2}$$

Действительные числа $t_0 \ge 0$, $t_1 \succ t_0$, $R \succ 0$ и функция $f(r) \in L_2(0,R)$ известны. Функция $u(t,r)$ называется допустимым управлением, если $u(t,r) \in L_2(\Omega)$, где множество Ω имеет вид: $\Omega = \{(t,r) : t \in [t_0,t_1], r \in [0,\ R]\}$. В случае фиксированного допустимого управления $u(t,r)$ решением $z(t,r)$ краевой задачи (1) - (2) считается обобщенное решение $z(t,r) \in L_2(\Omega)$. На множестве решений краевой задачи (1) - (2) рассматривается задача минимизации функционала

$$I(u,z) = \frac{1}{2}\int_0^R z^2(t_1,r)\,rdr + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\int_0^R [z^2(t,r) + u^2(t,r)]\,rdrdt. \tag{3}$$

Допустимое управление $u(t,r)$, на котором реализуется наименьшее возможное значение функционала(3), называется оптимальным управлением.

Теорема.Оптимальное управление $u(t,r)$ имеет вид $u(t,r) = -\int_0^R P(t,r,\rho)z(t,\rho)\,\rho d\rho$,

где функция $P(t,r,\rho)$ есть решением интегро-дифференциального уравнения

$$\frac{\partial P(t,r,\rho)}{\partial t} + a^2\left(\frac{\partial^2 P(t,r,\rho)}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial P(t,r,\rho)}{\partial \rho}\right) +$$

$$+a^2\left(\frac{\partial^2 P(t,r,\rho)}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial P(t,r,\rho)}{\partial \rho}\right) - \int_0^R P(t,r,s)P(t,s,\rho)\,sds + \frac{1}{\rho}\delta(r-\rho) = 0,$$

удовлетворяет краевымусловиям $P(t,R,\rho) = 0$, $P(t,r,R) = 0$ и дополнительному условию $P(t_1,r,\rho) = \frac{1}{\rho}\delta(r-\rho)$,($\delta(r)$ – дельта-функция Дирака), функция $z(t,\rho)$ служит решением интегро-дифференциального уравнения

$$\frac{\partial z(t,\rho)}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 z(t,\rho)}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial z(t,\rho)}{\partial \rho}\right) - \int_0^R P(t,\rho,s)z(t,s)\,sds$$

иудовлетворяетусловиям $z(t_0,\rho) = f(\rho)$, $|z(t,0)| \prec \infty$, $z(t,R) = 0$.

АлілуйкоАндрійМиколайович, кандидатфіз.-мат. наук, доцент,
Тернопільський національний економічний університет, Тернопіль, Україна,
e-mail: aliluyko@imath.kiev.ua;
Єрьоменко Валерій Олександрович, кандидат фіз.-мат. наук, доцент,
Тернопільський національний економічний університет, Тернопіль, Україна,
e-mail: eromenko-v@rambler.ru;

РОБАСТНА СТІЙКІСТЬ ЛІНІЙНИХ СИСТЕМ КЕРУВАННЯ З МАТРИЧНИМИ НЕВИЗНАЧЕНОСТЯМИ

Алілуйко А.М., Єрьоменко В.О.

Розглядається лінійна неперервна динамічна система керування

$$\dot{x} = (A + \Delta A(t))x + (B + \Delta B(t))u, \quad y = Cx + Du, \quad t \geq 0, \tag{1}$$

де $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$ і $y \in \mathbb{R}^l$ - вектори відповідно стану, керування та спостереження об'єктів, A, B, C і D - сталі матриці відповідних розмірів $n \times n$, $n \times m$, $l \times n$ і $l \times m$,

$$\Delta A(t) = F_A \Delta_A(t) H_A, \quad \Delta B(t) = F_B \Delta_B(t) H_B, \tag{2}$$

де F_A, F_B, H_A, H_B - сталі матриці відповідних розмірів, а матричні невизначеності $\Delta_A(t)$ і $\Delta_B(t)$ задовольняють обмеженню $\| \Delta(t) \| \leq 1$ або $\| \Delta(t) \|_F \leq 1$ при $t \geq 0$. $\| \cdot \|$ - евклідова норма вектора і спектральна норма матриці, $\| \cdot \|_F$ - матрична норма Фробеніуса.

Множина стабілізуючих регуляторів визначається у вигляді

$$u = Ky, \quad K \in E = \{K \in \mathbb{R}^{m \times l} : K^T P^{-1} K \leq Q\}, \tag{3}$$

де $P = P^T > 0$ і $Q = Q^T > 0$ - деякі додатно визначені матриці.

Теорема. Нехай для деяких $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ виконуються матричні нерівності

$$D^T Q D < P^{-1}, \quad \begin{bmatrix} AX + XA^T + \varepsilon_1 F_A F_A^T + \varepsilon_2 F_B F_B^T & B & XC^T & XH_A^T & 0 \\ B^T & -P^{-1} & D^T & 0 & H_B^T \\ CX & D & -Q^{-1} & 0 & 0 \\ H_A X & 0 & 0 & -\varepsilon_1 I & 0 \\ 0 & H_B & 0 & 0 & -\varepsilon_2 I \end{bmatrix} \leq 0 (< 0),$$

де $X = X^T > 0$. Тоді будь-яке керування (3) забезпечує стійкість (асимптотичну стійкість) нульового положення рівноваги системи (1), (2) і загальну функцію Ляпунова $v(x) = x^T X^{-1} x$.

При доведенні теореми використані відомі узагальнення твердження достатності відомого критерія, який називається лемою Пітерсена про матричну невизначеність [1], [2].

1. Поляк Б.П. Идеология инвариантных эллипсоидов в задаче о робастном подавлении ограниченных внешних возмущений / Б.П. Поляк, М.В. Топунов, П.С. Щербаков // Стохастическая оптимизация в информатике. – 2007, - Вып. 3. - С. 51-84.

2. Мазко А.Г. Робастная устойчивость и оценка качества семейства нелинейных систем управления / А.Г Мазко // Проблеми динаміки та стійкості багатовимірних систем: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. - 2011, — Т. 8, № 2. — С. 174–186.

Андреев Александр Сергеевич, доктор физ.-мат. наук, профессор,
Ульяновский государственный университет, Ульяновск, Россия,
e-mail: AndreevAS@ulsu.ru;
Перегудова Ольга Алексеевна, доктор физ.-мат. наук, доцент,
Ульяновский государственный университет, Ульяновск, Россия,
e-mail: peregudovaoa@gmail.com

ОБ УПРАВЛЕНИИ ДВИЖЕНИЕМ МАНИПУЛЯЦИОННЫХ РОБОТОВ НА ОСНОВЕ ПРЯМОЙ И НЕЛИНЕЙНОЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗЕЙ

Андреев А.С., Перегудова О.А.

Уравнения движения манипуляционных роботов могут быть представлены в следующем векторно-матричном виде [1]

$$D(q)\ddot{q}+C(q,\dot{q})\dot{q}+g(q)=u \qquad (1)$$

где $q-$ вектор обобщенных координат; $\dot{q}-$ вектор обобщенных скоростей; $D:R^n\to R^{n\times n}-$ матрица инерции, $C:R^n\times R^n\to R^{n\times n}$ – матрица кориолисовых и центробежных сил; $g:R^n\to R^n$ – вектор потенциальных сил и $u\in R^n$ – вектор управления.

В работе представлены результаты решения задачи о стабилизации нестационарного программного движения системы (1) на основе построения векторной функции Ляпунова и системы сравнения. Найдено управление с прямой и нелинейной обратной связью $u=u^{(0)}(t)+u^{(1)}(t,x,\dot{x})$ для системы (1), где $u^{(0)}(t)$ есть программное управление, а $u^{(1)}(t,x,\dot{x})$ имеет вид

$$u^{(1)}(t,x,\dot{x})=B(t,x)(\dot{x}+p(x)),\qquad u^{(1)}(t,0,0)\equiv 0$$

с непрерывной ограниченной матрицей коэффициентов усиления в структуре обратной связи $B\in R^{n\times n}$, ($p:R^n\to R^n$ есть нелинейная по x вектор-функция такая, что $p\in C^1$, $p(0)\equiv 0, \| p(x)\| \geq p_0(x)$, при этом, $p_0(x)=0\leftrightarrow x=0$), при котором нулевое решение $x=\dot{x}=0$ системы уравнений в отклонениях от программного движения будет экспоненциально устойчиво. С использованием результатов работ [2,3] получены условия стабилизации, применимые для целого множества программных движений, которые, в отличие от работы [4], где задача стабилизации решена при помощи ПД-регулятора и скалярной функции Ляпунова, не требуют оценки производной матриц инерции и кориолисовых и центробежных сил.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (15-01-08482).

1. Spong Mark W., Hutchinson Seth and Vidyasagar M. Robot Dynamics and Control. –New York: Wiley, 2004.
2. Андреев А.С., Перегудова О.А. О стабилизации программных движений голономной механической системы // XII Всероссийское совещание по проблемам управления ВСПУ-2014 / Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН. – М. : Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, 2014. – С. 1840-1843.
3. Перегудова О.А., Макаров Д.С. Синтез управления двузвенным манипулятором // Автоматизация процессов управления. – 2014. – № 4 (38). – С. 36-41.
4. Kelly R. and Salgado R. PD Control with Computed Feedforward of Robot Manipulators: A Design Procedure // IEEE Transactions on Robotics and Automation. –1994. – Vol. 10, № 4. – P. 566-571.

Baranovska Lesia Valeriivna, PhD, associate professor,
National Technical University of Ukraine "Kyiv Polytechnic Institute", *Kyiv, Ukraine*,
e-mail: Lesia@baranovsky.org

THE METHOD OF RESOLVING FUNCTIONS FOR DIFFERENTIAL-DIFFERENCE PURSUIT GAME OF NEUTRAL TYPE

Baranovska L.V.

The pursuit game with one evader and one pursuer is considered. Conflict-control process is described by system of the differential-difference equations of neutral type. These equations contain unknown function and its derivatives at different times:

$$\dot{z}(t)=\sum_{i=1}^{m}A_i\dot{z}(t-\omega_i)+\sum_{i=0}^{m}B_i z(t-\omega_i)-u(t)+v(t),\quad t\geq 0. \tag{1}$$

Here $z(t)\in \mathrm{R}^n$, $A_i\ (i=1,\ldots,m)$, $B_i\ (i=0,\ldots,m)$ – constant square matrices of order n; $0=\omega_0<\omega_1<\ldots<\omega_m$ – constants; the controls of players $u\in U$, $v\in V$ are measurable functions of time; U, V – nonempty compact sets.

In R^n consider a terminal cylindrical set of form

$$M^*=M_0+M, \tag{2}$$

where M_0 is a linear subspace in R^n and $M\in K(L)$, with L being the orthogonal complement of M_0 in R^n.

The goals of the pursuer (u) and evader (v) are opposite. The first player tries to bring the trajectory of process (1) to the terminal set (2) in the shortest time, whereas the second player tried to maximally put off the instant when the trajectory reaches the set M^*, or even avoid this meeting at all [1, 2].

One of the effective methods for solving specific problems of pursuit game is the method of resolving functions [3], which is closely related to the first direct method Pontryagin and provides a basis for the classical rules of parallel convergence, long-known design engineers of aviation and rocketry. The modification of the method of resolving functions for differential-difference pursuit game of neutral type is developed. The sufficient conditions on the parameters of the process for the end of the game for a certain finite time are obtained.

1. Chikrii A.A. A type of controlled system with delay[Text] / A.A. Chikrii , L.V. Baranovskaya // Cybernetics and computing technology, New York. – 1998. − № 107. − P. 1−8.

2. Baranovskaya G.G.Group Pursuit in Quasilinear Differential-Difference Games [Text] / G.G.Baranovskaya, L.V. Baranovskaya // Journal of Automation and Information Sciences, 29(1), 1997. – PP. 55-62.

3. ChikriiA. A.Conflict-ControlledProcesses [Text] / A. A. Chikrii. – Boston; London; Dordrecht: KluwerAcad. Publ., 1997. – 427 p.

Белоусов Александр Андреевич, кандидат физ.-мат. наук, старший научный сотрудник,
Институт кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины, Киев, Украина,
e-mail: abelousov@ukr.net;

О ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГРАХ С ВЫПУКЛЫМИ ИНТЕГРАЛЬНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА УПРАВЛЕНИЕ

Белоусов А.А.

Динамика игры задаётся линейным дифференциальным уравнением

$$\dot z = Az + Bu - Cv, \quad z(0) = z^0,\ z \in \mathsf{R}^n,\ u \in \mathsf{R}^m,\ v \in \mathsf{R}^l. \tag{1}$$

Управления игрока-преследователя $u(\cdot)$ и убегающего игрока $v(\cdot)$ являются измеримыми (по Лебегу) функциями, которые удовлетворяют интегральным ограничениям:

$$\int_0^\infty \varphi(u(\tau))\,d\tau \le 1, \quad \int_0^\infty \psi(v(\tau))\,d\tau \le 1. \tag{2}$$

Функция φ, $\varphi : \mathsf{R}^m \to \mathsf{R}$, предполагается неотрицательной, выпуклой и полунепрерывной снизу [1]. Полагаем, что $\varphi(0) = 0$ и множество уровня $\Phi(\gamma) = \{u \in \mathsf{R}^m : \varphi(u) \le \gamma\}$ – ограничено хотя бы для одного γ, $\gamma \ge 0$. Функция ψ, $\psi : V \to \mathsf{R}$, $V \subset \mathsf{R}^l$, предполагается неотрицательной и полунепрерывной сверху на своей области определения V.

Терминальное множество M является линейным подпространством R^n. Обозначим через π оператор проектирования из R^n на ортогональное дополнение L к M.

Условие (аналог условия Л.С.Понтрягина). *Существует такое число* λ, $0 \le \lambda < 1$, *что для всех* t, $t \ge 0$, *и* v, $v \in V$, *выполняется включение* :

$$\pi e^{At} Cv \in \pi e^{At} B\Phi(\lambda \cdot \psi(v)). \tag{3}$$

Рассмотрим вспомогательную функцию, которую можно назвать разрешающей функцией дифференциальной игры с интегральными ограничениями:

$$\gamma(t,\tau,v) = \sup\{\gamma \ge 0 : a(t)\gamma + b(\tau,v) \in H(\tau)\,\mathrm{epi}\varphi\},$$

где $a(t) = \begin{pmatrix} -\pi e^{At} z^0 \\ 1-\lambda \end{pmatrix}$, $b(\tau,v) = \begin{pmatrix} \pi e^{A\tau} Cv \\ \lambda\psi(v) \end{pmatrix}$, $H(\tau) = \begin{pmatrix} \pi e^{A\tau} B & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : \mathsf{R}^m \times \mathsf{R} \to L \times \mathsf{R}$,

$\mathrm{epi}\varphi = \{(u,\mu) \in \mathsf{R}^m \times \mathsf{R} : \mu \ge \varphi(u)\}$ – надграфик φ [1], $(t,\tau,v) \in \mathsf{R}_+ \times \mathsf{R}_+ \times V$, $\mathsf{R}_+ = [0,\infty)$.

Напомним [1], что рецессивным конусом 0^+W выпуклого множества W, $W \subset \mathsf{R}^k$, называется множество $0^+W = \{a \in \mathsf{R}^k : a + W \subset W\}$.

Введем множество $\Delta = \{(t,\tau) \in \mathsf{R}_+ \times \mathsf{R}_+ : a(t) \notin H(\tau) \cdot 0^+ \mathrm{epi}\varphi\}$.

Теорема. *Полагаем, что выполнено условие (3) на параметры игры (1), (2). Предположим, что существует момент* $T = T(z^0)$ *такой, что* $\{T\} \times [0,T] \subset \Delta$ *и для всех допустимых управлений* $v(\cdot)$ *выполняется неравенство* $\int_0^T \gamma(T, T-\tau, v(\tau))d\tau \ge 1$.

Тогда дифференциальная игра может быть закончена в момент T, *т.е. для любого допустимого управления убегающего игрока* $v(t)$ *существует допустимое управление преследователя* $u(t)$, *которое гарантирует приведение решения уравнения (1)* $z(t)$, *соответствующего управлениям* $(u(t), v(t))$ *и начальному положению* z^0, *на терминальное множество в момент* T : $z(T) \in M$.

1. Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. – М.: Мир, 1973. – 470 с.

Ведель Яна Ігорівна, студентка 4 курсу, факультету кібернетики,
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
e-mail: yandx@ukr.net

УЗАГАЛЬНЕННЯ МЕТОДУ ПОПОВА ДЛЯ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ ПРО РІВНОВАГУ

Ведель Я.І.

Задачі рівноваги природньо виникають у багатьох розділах прикладної математики: рівновага Вальраса в економіці, рівновага Вардропа в логістиці, рівновага Неша та інші.

Нехай C - непорожня опукла підмножина гільбертового простору H, $f: C \times C \to \mathbb{R}$. Задача [1, 2]:

$$\text{знайти } x \in C: f(x, y) \geq 0 \ \forall y \in C. \tag{1}$$

Типові постановки:

• Якщо $f(x, y) = g(x) - g(y)$, де $g: C \to \mathbb{R}$, то задача (1) є задачею умовної мінімізації $g \to \min\limits_{C}$.

• Якщо $f(x, y) = (Ax, y - x)$, де $A: C \to H$, то задача (1) зводиться до класичної варіаційної нерівності

$$\text{знайти } x \in C: (Ax, y - x) \geq 0 \ \forall y \in C. \tag{2}$$

• Нехай $T: C \to C$. Якщо $f(x, y) = (x - Tx, y - x)$, то рівноважна задача (1) рівносильна пошуку нерухомої точки оператора T.

• Нехай P, Q - опуклі підмножини H, $C = P \times Q$, $L: C \to \mathbb{R}$ - опукло-угнута функція. Точка $(\bar{x}, \bar{p}) \in C$ називається сідловою точкою функції L, якщо

$$L(\bar{x}, p) \leq L(\bar{x}, \bar{p}) \leq L(x, \bar{p}) \ \ \forall x \in C \ \forall p \in Q. \tag{3}$$

Покладемо $f(v, w) = L(z, p) - L(x, y)$, де $v = (z, y)$, $w = (x, p)$. Тоді задача пошуку сідлової точки (3) рівносильна задачі (1).

У доповіді мова піде про наступний новий ітераційний метод розв'язання задачі (1):

$$\begin{cases} x_1 = y_1 \in C, \\ x_{n+1} = \mathrm{p}rox_{\lambda f(y_n, \cdot)} x_n, \\ y_{n+1} = \mathrm{p}rox_{\lambda f(y_n, \cdot)} x_{n+1}, \end{cases}$$

де $\lambda > 0$, $\mathrm{p}rox_h$ - проксимальний оператор опуклої власної та напівнеперервної знизу функції. Даний метод є узагальненням методу Попова пошуку сідлових точок [3]. Основна увага приділена доведенню збіжності породжених методом послідовностей до розв'язків задачі (1).

1. Антипин А.С. Равновесное программирование: проксимальные методы // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. - 1997. - 37, № 11. - С. 1327-1339.

2. Войтова Т.А., Денисов С.В., Семенов В.В. Сильно збіжний модифікований варіант методу Корпелевич для задач рівноважного програмування // Журнал обчислювальної та прикладної математики. - 2011. - № 1 (104). - С. 10-23.

3. Попов Л.Д. Модификация метода Эрроу-Гурвица поиска седловых точек // Математические заметки. - 1980. - Т. 28, № 5. - С. 777-784.

Галкін Олександр Анатолійович, кандидат фіз.-мат. наук,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
e-mail: galkin.o.a.@gmail.com

ПОБУДОВА ЛІНІЙНИХ КЛАСИФІКАТОРІВ В КОНТЕКСТІ БІНАРНОЇ РЕГРЕСІЇ

Галкін О.А.

Використання регресійної функції глибини дає можливість отримання глибини центрування, визначеної за допомогою вектора коефіцієнтів $\varepsilon = (\varepsilon, \varphi) \in R^{l+1}$ в лінійній регресійній структурі. При заданій множині даних $\Phi_m = [\{\varphi_i = (\phi_{i1}, \phi_{i2}, \phi_{id}), \gamma_i\};\ i = 1,2,...,m]$ з m точок, ε не є центруванням до Φ_m тоді і тільки тоді, якщо існує така афінна гіперплощина S в φ-просторі, що жоден елемент φ_i не належить до S, а всі останні $\gamma_i - \varepsilon'(\varphi_i, 1)$ є додатніми в одному відкритому напівпросторі в φ-просторі та всі від'ємні в доповненні відкритого напівпростору. Регресійна глибина центрування ε визначається як мінімальне число точок, що повинні бути видалені для перетворення в нецентрування.

Дана ідея регресійної глибини була використана в контексті бінарної регресії для побудови лінійних класифікаторів для двокласових задач. Було взято мітки класу,як значення залежної змінної γ та розглянутоцентрування $\varepsilon = (0, 0, ..., 0, 0.7)$. Значення ε є нецентруванням до Φ_m тоді і тільки тоді, якщо існує гіперплощина S в φ-просторі, що повністю розділяє дані з двох класів. Отже, регресійна глибина центрування ε може розглядатися, як мінімальне число помилково класифікованих даних, що може бути досягнуто за допомогою розділової гіперплощини S в φ-просторі [1].

Було розглянуто задачу визначення розділової гіперплощини шляхом мінімізації загального числа помилково класифікованих точок. Визначено, що лінійний класифікатор є емпірично оптимальним, коли два конкуруючих класи мають апріорні ймовірності, пропорційні їх розмірам навчальних вибірок. В загальному випадку можна коректно налаштувати ваги для різних точок та визначити виважену регресійну глибину центрування ε, як мінімальне число ваг, що повинні бути видалені для перетворення в нецентрування. Тоді, виважена регресійна глибина в кінцевому підсумку стає середньою ймовірністю помилкової класифікації на навчальній вибірці наступного вигляду:

$$\Psi_m(\varepsilon, \varphi) = \frac{p_1}{m_1} \sum_{i=1}^{m_1} I\{\varepsilon' \phi_{1i} + \varphi < 0\} + \frac{p_2}{m_2} \sum_{i=1}^{m_2} I\{\varepsilon' \phi_{2i} + \varphi > 0\}.$$

Мінімізація $\Psi_m(\varepsilon, \varphi)$ відносно ε та φ дає оцінки $\varepsilon_{регр.}$ та $\varphi_{регр.}$, що визначають розділову гіперплощину для використання в процесі класифікації. Задача мінімізації може бути обмежена до $\{(\varepsilon, \varphi) : \|(\varepsilon, \varphi)\| = 1\}$, а мінімізація $\Psi_m(\varepsilon, \varphi)$ є оптимізаційною задачею на скінченній множині [2].

Крім того, було досліджено той факт, що оцінка максимальної ймовірності в задачі логістичної регресії існує лише тоді, коли є певні збіги в коваріативному просторіміж даними з двох класів, що відповідають значенням 0 та 1 залежної змінної. У випадку абсолютної роздільності не існує скінченної оцінки максимальної ймовірності для вектора регресійних коефіцієнтів ε.

1. Chaudhuri P., Marron J.Scale space view of curve estimation / P. Chaudhuri, J. Marron // The Annals of Statistics. – 2000. – 28. – P.401-430.

2. Mizera I. On depth and deep points: a calculus / I. Mizera // The Annals of Statistics. – 2002. – P. 1670-1721.

Гладун Любомир Володимирович, кандидат фіз.-мат. наук, доцент, *Національний університет водного господарства та природокористування, Рівне, Україна,*
e-mail: lvgladun@ukr.net
Борисюк Віктор Юрійович, магістр,
Національний університет водного господарства та природокористування, Рівне, Україна,
e-mail: victorborusyuk@gmail.com

ПРО ОПТИМАЛЬНІ ТРАЄКТОРІЇ РУХУ ЦІЛКОМ КЕРОВАНОЇ СИСТЕМИ ПРИ НАЯВНОСТІ ПЕРЕШКОДИ

Гладун Л.В., Борисюк В. Ю.

Нехай рухцілком керованої системи описується системою диференціальних рівнянь:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_1 x_2 + b_1 u_1, \\ \dot{x}_2 &= -a_2 x_1 + b_2 u_2, \end{aligned} \tag{1}$$

де x_1, x_2 – фазові координати, які мають кусково-неперервну похідну; u_1, u_2 – параметри керування, що є кусково-неперервними функціями; a_1, a_2, b_1, b_2 – довільні додатні константи.

На параметри керування u_1, u_2 накладається умова:

$$|u_1| \le 1, \ |u_2| \le 1. \tag{2}$$

Заданомісце знаходження системи в початковий момент часу t_0:

$$x^0 = (x_1(t_0), \ x_2(t_0)). \tag{3}$$

Крім того, у фазовому просторі X_1OX_2 задана еліптична перешкодаз півосями a та b

$$\frac{(x_1 - x_1^p)^2}{a} + \frac{(x_2 - x_2^p)^2}{b} < 1 \tag{4}$$

із центром в точці (x_1^p, x_2^p).

На траєкторії системи $(x_1(t), x_2(t))$ накладається умова обминання перешкоди:

$$\frac{(x_1(t) - x_1^p)^2}{a} + \frac{(x_2(t) - x_2^p)^2}{b} \ge 1. \tag{5}$$

Із системою пов’язаний критерій:

$$T = t_1 - t_0, \tag{6}$$

де t_1 – час попадання системи в початок координат.

Постановка задачі: знайти розв’язок системи (1) при умові (2), який задовольняє (3), (5) і мінімізує критерій (6) [1-3].

Кожна траєкторія руху системи (1) належить до одного з чотирьох сімейств концентричних еліпсів. Для кожної перешкоди знайдено непроникну область – множину точок фазового простору, із довільної точки якої не існує траєкторії руху системи, по якій система перемістися в початок координат.

У залежності від місця знаходження перешкод знайдено оптимальні траєкторії руху системи, якщо система в початковий момент часу не знаходиться в непроникній області.

1.Крак Ю.В. Теорія керування / Ю.В.Крак, О.Л.Левович - Київ: Либідь, 2003. - 380 с.

2.Гладун Л.В. Рух керованої системи за мінімальний час / Л.В.Гладун, Е.Е.Тичинський // Рівне : Вісник НУВГП, випуск 4, ч.3, 2007. - с. 236-246.

3. Понтрягин Л.С. Математическая теория оптимальных процессов / Л.С.Понтрягин,В.Г.Болтянский, Р.В.Гамкрелидзе, Е.Ф.Мищенко–Москва: Наука, 1983. – 392 с.

Демыдюк Мирослав Васильевич, кандидат физ.-мат. наук, старший научный сотрудник,
Інститут прикладных проблем механики и математики им. Я.С.Подстригача НАН Украины,
e-mail: demydyuk@iapmm.lviv.ua;

ОПТИМИЗАЦИЯ ЦИКЛИЧЕСКИХ ТРАНСПОРТНЫХ ОПЕРАЦИЙ МАНИПУЛЯЦИОННЫХ СИСТЕМ С АКТИВНЫМИ И ПАССИВНЫМИ ПРИВОДАМИ

Демыдюк М.В.

Исследуем задачу оптимизации управляемых движений манипуляционной системы с активными и пассивными приводами. Система имеет n степеней свободы, управление по каждой из них осуществляется при помощи активного привода (привода с внешним источником энергии, например, электропривода). Манипулятор выполняет циклические транспортные операции: перемещает груз с начального положения (рабочего пространства) в конечное состояние, после чего без груза возвращается обратно в начальное положение. Время движения манипулятора в прямом и обратном направлениях считается заданным. Для рекуперации энергии манипулятора в его конструкцию вмонтированы пружинно-демпферные устройства (пассивные приводы), генерирующие дополнительные силовые воздействия в m степенях подвижности ($m \le n$) [1-3]. Этапы циклической операции (прямое и обратное движения) манипулятора связаны между собой возможностью накопления механической энергии на одном из них и её освобождения (расходования) на другом.

Введём ряд обозначений: $\mathbf{q}(t)$ – вектор обобщённых координат манипулятора, $\mathbf{u}(t)$ – вектор управляющих воздействий активных приводов, $\mathbf{c}$ – вектор конструктивных параметров пассивных приводов (например, жёсткость пружин, вязкость демпферов и т. д.), $\mathbf{c} \in \Omega$, где Ω – множество допустимых значений параметров. Для оценки качества управляемых движений манипулятора зададим некоторый функционал $P[\mathbf{q}, \mathbf{u}, \mathbf{c}]$. Возможна постановка **задачи**:определить параметры $\mathbf{c}^* \in \Omega$, движение системы $\mathbf{q}^*(t)$ и соответствующие управления $\mathbf{u}^*(t)$, обеспечивающие (при заданных ограничениях) выполнение манипулятором циклической транспортной операции с минимальным значением функционала $P[\mathbf{q}, \mathbf{u}, \mathbf{c}]$.

Эффективной в решении сформулированной задачи есть методика параметрической оптимизации (в пространстве обобщённых координат системы) [1-3]. В соответствии с методом Ритца (в исследовании вариационных задач) обобщённые координаты системы представляем в виде суммы заданных функций (например, кубического полинома и конечного тригонометрического ряда) с неизвестными параметрами (вектор $\mathbf{k}$). Дальше, используя подход обратных задач динамики, из уравнений движения манипуляционной системы находим параметрическое семейство управлений $\mathbf{u}(t, \mathbf{k}, \mathbf{c})$. После подстановки параметризованных функций $\mathbf{q}(t, \mathbf{k})$, $\mathbf{u}(t, \mathbf{k}, \mathbf{c})$ в функционал $P[\mathbf{q}, \mathbf{u}, \mathbf{c}]$ получаем целевую функцию многих переменных $\tilde{P}(\mathbf{k}, \mathbf{c})$, что сводит исходную задачу оптимального управления (с параметрами) к задаче нелинейного математического программирования.

1. Демидюк М.В., Ширко М.І.Оптимізація законів руху та конструктивних параметрів маніпуляційного модуля // Відбір та обробка інформації – 2007. – Вип. 26 (102). – С. 44–49.

2. Демидюк М.В., Ширко М.І. Оптимізація режимів руху та параметрів дволанкового маніпулятора з активними і пасивними приводами // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2007. – **50**, № 2. – С. 41–48.

3. Демидюк М.В. Параметрична оптимізація чотириланкового замкнутого маніпулятора з активними й пасивними приводами // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2009. – **52**, № 1. – С. 193-202.

Kapustian Olena Anatoliivna, PhD (Phys.–Math.), Head of Research Sector, Faculty of Cybernetics,
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine,
e-mail: olena.kap@gmail.com;
Mazur Oleh Kostyantynovich, Senior Lecturer,
National University of Food Technologies, Kyiv, Ukraine,
e-mail: okmazur@ukr.net

THE OPTIMAL CONTROL PROBLEM FOR PARABOLIC EQUATION WITH NON-LOCAL BOUNDARY CONDITIONS IN CIRCULAR SECTOR

Kapustian O.A., Mazur O.K.

Among a variety of classical and modern methods for analysis of infinite-dimensional optimal control problems, Fourier method remains a powerful tool for the solving of linear-quadratic problems for distributed systems. In many cases this method allows to decompose initial problem, i.e. to reduce it to countable number of one-dimensional optimal control problems.

In this paper we consider a minimization problem for quadratic cost functional on the solutions of linear parabolic equation with nonlocal boundary conditions in a circular sector. A classical solvability of such boundary value problem for Laplace equation was proved in the paper [1], using biorthonormal basis systems of functions. Corresponding optimal control problem for elliptic equation was solved in [2]. Here, in contrast to the elliptic case, the problem is reduced to a countable sequence of infinite-dimensional problems which dependent among themselves.

Using Fourier-Bessel series [3] – [5] for a special class of initial data, we proved the solvability of the corresponding initial-boundary value problem for a fixed control. We also established the solvability of the original optimal control problem under additional conditions on its initial data.

1. Moiseev E.I. About resolvability of non-local boundary-value problemwith equality of fluxes. / E.I. Moiseev, V.E. Ambarzumyan // *Differential equations*. – 2010. – V. 46, N 5, PP. 718-725.
2. Kapustyan V.O: Distributed optimal control in one non-self-adjoint boundary value problem / V.O. Kapustyan, O.A. Kapustian, O.K. Mazur // *Continuous and Distributed Systems*. – 2014. – V. 31, Issue 12. – PP. 45-52.
3. Watson G.N. Theory of Bessel Functions. Cambridge: University press. – 1945.
4. Scherberg M.G. The degree of convergence of a series of Bessel functions / M.G. Scherberg // *Trans. Amer. Math. Soc*. – 1933. – V. 35. – PP. 172-183.
5. Kapustyan V.O. Problem of optimal control for the Poisson equation with nonlocal boundary conditions / V.O. Kapustyan, O.A. Kapustian, O.K. Mazur // *Journal of Mathematical Sciences*, V.201, N.3, 2014, pp. 325-334.

Леонтьева Виктория Владимировна, к. ф.-м. н., доцент,
Запорожский национальный университет, Запорожье, Украина.
e-mail: vleonteva@mail.ru
Кондратьева Наталия Александровна, к. ф.-м. н., доцент,
Запорожский национальный университет, Запорожье, Украина.
e-mail: n-kondr@mail.ru

НАБЛЮДЕНИЕ В НЕПРЕРЫВНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПОЗИТИВНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ БАЛАНСОВОГО ТИПА

Леонтьева В.В., Кондратьева Н.А.

Работа посвящена решению задачи наблюдения за позитивной динамической системой балансового типа, поведение которой описывается с помощью разомкнутой непрерывной математической модели, представляющейся в виде [1]

$$\dot{X}(t)=(I-B)^{-1}(A-I)X(t)+(I-B)^{-1}C(t), \qquad (1)$$

где время t предполагается непрерывным; $X(t)-n-$мерный вектор состояния системы, о котором нет полной информации, $C(t)-n-$мерный вектор управления системы, $A,B-$ постоянные матрицы размерностей $n\times n$, $I-$ единичная матрица размерности $n\times n$. На матрицы коэффициентов в модели накладываются ограничения, обеспечивающие получение неотрицательных решений на бесконечном интервале времени: матрицы $A,B,(A-B)$ должны быть неотрицательными и продуктивными, а $\tilde{\tilde{A}}=(I-B)^{-1}(A-I)\le 0$.

Согласно [2], рассматриваемая система является полностью наблюдаемой, т.е. любое ее состояние $X(t)$ можно восстановить по известным значениям наблюдаемой переменной $Y(t)=DX(t)$ ($D=(d_{ij})-$ известная матрица постоянных коэффициентов соответствующей размерности, измеренным на интервале $0\le t\le T$) и использовать для управления.

Для данной системы наблюдателем полного порядка будет система

$$\dot{\hat{X}}(t)=\left[\tilde{\tilde{A}}-KD\right]\hat{X}(t)+(I-B)^{-1}C(t)+KY(t), \qquad (2)$$

где определение коэффициентов матрицы K усиления наблюдателя основывается на дуальности задач управления и наблюдения. Задача наблюдения сводится к определению системы (2) такой, чтобы ошибка восстановления вектора состояния $e(t)=X(t)-\hat{X}(t)$, удовлетворяющая разностному уравнению $\dot{e}(t)=\left[\tilde{\tilde{A}}-KD\right]e(t)$, при $t\ge t_0$ стремилась к нулю при $t\to\infty$, что для всех $e(0)=e_0$ является возможным при асимптотической устойчивости наблюдателя (2), определяемой поведением матрицы $\left[\tilde{\tilde{A}}-KD\right]$.

1. Леонтьева В.В. Построение и анализ разомкнутой непрерывной математической модели позитивной динамической системы балансового типа / В.В. Леонтьева, Н.А. Кондратьева // Вісник Запорізького національного університету: Збірник наукових праць. Фізико-математичні науки. – Запоріжжя: ЗНУ, 2010. – №1. – С. 81-88.

2. Леонтьева В.В. Наблюдаемость в разомкнутой непрерывной математической модели позитивной динамической модели балансового типа / В.В. Леонтьева, Н.А. Кондратьева // Материалы международной конференции «Моделирование, управление и устойчивость [MSC-2012]» (10-14 сентября 2012 г.). – Симферополь: ДИАЙПИ, 2012.– С. 179-180.

Мазко Алексей Григорьевич, доктор физ.-мат. наук,
Институт математики НАН Украины, Киев, Украина,
e-mail: mazko@imath.kiev.ua;
Кусий Сергей Николаевич, аспирант,
Институт математики НАН Украины, Киев, Украина,
e-mail: sergii.kusii@gmail.com;

СТАБИЛИЗАЦИЯ И H_∞ - ОПТИМИЗАЦИЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

Мазко А.Г., Кусий С.Н.

Рассматривается линейная система управления

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx + Du, \tag{1}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^l$ и $u \in \mathbb{R}^m$ - векторы соответственно состояния, измеряемого выхода и управления, A, B, C и D - постоянные матрицы. Стабилизация системы осуществляется с помощью динамического регулятора порядка $r \le n$ вида

$$\dot{z} = Zz + Vy, \quad u = Uz + Ky, \tag{2}$$

где $z \in \mathbb{R}^r$ - вектор состояния регулятора, Z, V, U и K - матрицы, подлежащие определению. Предлагаются новый критерий существования и методы построения стабилизирующего регулятора (2) для системы (1), основанные на решении линейных матричных неравенств [1]. Рассматриваются также обобщения данных методов для класса дескрипторных систем управления.

Для системы (1) с начальным вектором $x(0) = 0$ изучается обобщенная задача H_∞ - оптимизации на классе регуляторов

$$u = K_* y + w, \quad \det(I_m - K_* D) \neq 0, \tag{3}$$

где K_* - матрица обратной связи, обеспечивающая асимптотическую устойчивость замкнутой системе (1), (3) при $w = 0$. В качестве $w \in \mathbb{R}^m$ может быть вектор внешних возмущений или новое управление. Вводится критерий качества системы

$$J_{P,Q} = \sup_{0 < \|w\|_P < \infty} J(w), \tag{4}$$

$$\text{где } J(w) = \frac{\| y \|_Q}{\| w \|_P}, \quad \| y \|_Q^2 = \int_0^\infty y^T Q y dt, \quad \| w \|_P^2 = \int_0^\infty w^T P w dt,$$

$Q = Q^T > 0$ и $P = P^T > 0$ - некоторые положительно определенные матрицы. Данный критерий характеризует взвешенный уровень гашения входного сигнала в системе управления. В частном случае $K_* = 0$ и $P = Q = I_n$ функционал $J(w)$ совпадает с H_∞ - нормой матричной передаточной функции системы $G(\lambda) = C(\lambda I_n - A)^{-1} B + D$ [2].

Формулируются необходимые и достаточные условия выполнения оценки $J_{P,Q} < 1$. Данные условия обеспечивают асимптотическую устойчивость замкнутой системе (1), (3) для любого вектора $w = Ky$, где матрица коэффициентов K принадлежит эллипсоиду $\mathcal{K} = \{K : K^T P K \le Q\}$, а также дают метод построения общей квадратичной функции Ляпунова $v(x) = x^T X x$, основанный на решении линейных матричных неравенств.

1. Мазко А.Г. Робастная устойчивость и оценка функционала качества нелинейных систем управления // Автоматика и телемеханика. - 2015. №2. -С. 73-88.

2. Zhou K., Doyle J.C., Glover K. Robust and Optimal Control. - Englewood: Prentice-Hall Inc., 1996. - 586 p.

Малик Ігор Володимирович , кандидат фіз.-мат. наук, доцент,
ЧНУ ім. Юрія Федьковича, Чернівці, Україна,
e-mail: malyk.igor.v@gmail.com

СТІЙКІСТЬ НАПІВМАРКОВСЬКИХ ВИПАДКОВИХ ЕВОЛЮЦІЙ У СХЕМІ ДИФУЗІЙНОЇ АПРОКСИМАЦІЇ

МаликІ.В.

Питаннюзбіжностівипадковихпроцесівприсвяченанизкаробіт, наприклад [1,2], дедосліджуютьсясаменапівмарковськіпроцеси. При дослідженні питання збіжності природно виникає питання стійкості дограничних процесів ξ^{ε} за умови, що граничний процес ξ^0 є стійкий у певному розумінні. Розглянемо напівмарковські випадкову еволюцію (НМВЕ) ξ^{ε} у схемі дифузійної апроксимації, що задається співвідношенням

$$\xi^{\varepsilon}(t) = \xi(0) + \varepsilon^3\left[\int_0^{t/\varepsilon^6}\eta(ds; x(\varepsilon^2 s)) + \int_0^{t/\varepsilon^6}\gamma(ds; x(\varepsilon^2 s))\right], \quad (1)$$

де $x(t), t \ge 0$ - однорідний ергодичний марковський стрибковий процес перемикань у просторі $(E, \mathcal{E})$ зі стаціонарним розподілом $\pi(B), B \in \mathcal{E}$ та генератором Q; напівмарковські процеси [2] $\eta(t; x), t \ge 0, x \in E$ в евклідовому просторі $R^d, d \ge 1$ породжуються процесами марковського відновлення(ПМВ) $(\eta_n, \tau_n), n \ge 0$ з напівмарковським ядром:

$$G(u, dv, t; x) := G(u, dv; x)F_u(t), u \in R_d, dv \in \mathcal{R}^d, t \ge 0, x \in E;$$

неперервна складова еволюції $\gamma(t), t \ge 0$ між моментами відновлення τ_n та τ_{n+1}, за умови $x(\tau_n) = x, x \in E$, задається напівгрупами $\Gamma_t(x), t \ge 0$ з генераторами

$$\Gamma(x)\varphi(u) := a(u; x)\varphi'(u) + \int_{R^d}(\varphi(u+v) - \varphi(u) - v\varphi'(u))\Gamma(u, dv; x).$$

Тоді має місце

Теорема. Нехай 1) НМВЕ слабко збігається при $\varepsilon \downarrow 0$ до дифузійного процесу ξ^0, що задається стохастичним диференціальним рівнянням [3]; 2) існує функція Ляпунова $V(u), u \in R^d$ для усередненої системи ξ^0, яка має наступні властивості: умова експоненціальної стійкості для розв'язку усередненого рівняння $V'(u) \le -cV(u), c > 0$ та додаткова умова $|c(u,x)V'(u)| + |c(u,x)[c(u,x)V'(u)]'| \le c_0 V(u)$; 3) час перебування в стані θ_u - обмежений в середньому $0 < \inf_{u \in R^d} E\theta_u$, та задовольняє умову Крамера.

Тоді для $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, де ε_0 - достатньо мале, НМВЕ (1) при достатньо малих початкових даних $|\xi^{\varepsilon}(0)| \le c_3$ задовольняє співвідношення

$$P\left\{\lim_{t\to\infty}|\xi^{\varepsilon}(t)| = 0\right\} = 1. \quad (2)$$

1. Anisimov V.V. Switching processes in queueing models. - London : ISTE Ltd., 2008. - 345 p.

2. Koroliuk V.S., Limnios N. Stochastic systems in merging phase space. - Singapore : World Scientific Publishers, 2005 - 331 p.

3.Малик І.В. Напівмарковські випадкові еволюції з марковськими переключеннями // Науковий вісник Чернівецького національного університету. Математика. - 2012. - Т.2, №2-3. - С. 123-129.

Маслов Юрий Николаевич
кандидат физ.-мат. наук, доцент
Киев, Украина
E-mail: myun@i.ua

УПРАВЛЯЮЩИЕ И СОУПРАВЛЯЮЩИЕ ТЕХНОЛОГИИ В СФЕРЕ ОБРАЗОВАНИЯ

Маслов Ю. Н.

«Мудрость и Духовность народа управляет сознанием людей»
Преображение человечества [otkroveniya.info(11.11.05: 8)]

Сфера образования как человековключающая по Гвишиани система является сверхсложной, в которой часть является сложее, чем целое, что требует новых технологий обучения и воспитания. К таким технологиям можно отнести вместо существующих информационных и тому подобных так называемые управляющие и соуправляющие технологии математической педагогики [Управляющие технологии Начал математической педагогики // XIV межд. научн. конференция им. акад. М. Кравчука. Материалы конф. Т. 4. История и методика преподавания математики. – К.: НТУУ «КПИ», 2012. – 300 с. – С. 174].

С управляющими и соуправляющими технологиями связано новое направление оптимизации (23 математическая проблема Д. Гильберта «Развитие методов вариационного исчисления»), когда ставится и аксиоматически (6 математическая проблема Д. Гильберта «Математическое изложение аксиом физики») решается новая математическая задача оптимального соуправления, связанная с некоторыми проблемами строения, управления и поведения Всего, Всех и Вся, использующая математические преобразования оживления и одухотворения и другие, а также существующие математические теории оптимального управления Р. Беллмана, Л. С. Понтрягина и др. [Математически оптимальные соуправления в природе и обществе // XV международная научная конференция имени академика М. Кравчука. Материалы конференции в 4-х томах. - Т. 1. Дифференциальные и интегральные уравнения, их применения. – К.: НТУУ «КПИ», 2014. – 372 с. – С. 213-215.]

Математическая теория соуправления предлагает новые основы решения проблемы оптимального управления в сфере образования и практике индивидуализации обучения и воспитания, целью которых является «не столько накопление самих знаний, сколько достижение человеком, обладающим определённым багажом знаний, умения мыслить самостоятельно и творчески, а значит, постигать САМОСТОЯТЕЛЬНО новые горизонты знаний, зачастую - в смежных отраслях науки и техники!» [otkroveniya.info (04.08.11: 3)].

Соуправление в сфере образования и воспитания порождает Начала педагогической кибернетики (Начала), когда оптимизируются не управляеме, как это имеет место сегодня, а управляющие процессы. Оптимальные управляемые процессы и управления в этом случае, вообще говоря, отличаются от управлений и процессов, найденных при традиционных подходах к решению задач оптимизации управляемых систем. Оптимизация при этом связывается, в частности, с индивидуаизацией обучения и самостоятельностью учения.

Индивидуальность обучения достигается введением в педагогические науки и практику сферы образования новых математических понятий Начал: обучаемости и обученности, воспитанности и воспитуемости, плотности знаний и преобретённых умений (вместо оценок) и других, удовлетворяющих оптимально управляемым и управляющим, соуправляемым и соуправляющим дифференциальным уравнениям Колмогорова, Гамильтона, Шредингера и др. Самостоятельность учения (постижения знаний обучаемыми) связывется при этом с самоуправляемой программно соуправляющей компьютеризованной системой образования, алгоритмически построенной на Началах педагогической кибернетики.

Семенов Владимир Викторович, доктор физ.-мат. наук, профессор,
КНУ имени Тараса Шевченко, Киев, Украина,
e-mail: semenov.volodya@gmail.com;

НОВЫЕ АЛГОРИТМЫ ДЛЯ МОНОТОННЫХ ВАРИАЦИОННЫХ НЕРАВЕНСТВ И ЗАДАЧ О РАВНОВЕСИИ

Семенов В.В.

В докладе будет сделан обзор результатов недавних работ [1-10], в которых предложены и обоснованы новые методы решения вариационных неравенств вида:

$$\text{найти } x \in C : (Ax, y - x) \geq 0 \quad \forall y \in C,$$

где C - замкнутое выпуклое подмножество гильбертового пространства H, $A: H \to H$ - монотонный и липшицевый оператор. Основное внимание будет уделено технике доказательства сходимости методов и формулировке новых вопросов. Также будут рассмотрены новые проксимальные методы для решения задач о равновесии вида:

$$\text{найти } x \in C : F(x, y) \geq 0 \quad \forall y \in C,$$

где $F : C \times C \to \mathbb{R}$ - монотонная или псевдомонотонная бифункция.

Исследования финансово поддерживались ГФФИ Украины (проекты GP/F44/042, GP/F49/061) и ВР Украины (Именная стипендия Верховной Рады Украины для молодых ученых, 2013).

1. Malitsky Yu.V. A hybrid method without extrapolation step for solving variational inequality problems / Yu.V. Malitsky, V.V. Semenov // Journal of Global Optimization. - 2015, Volume 61. - Issue 1. - P. 193-202.

2. Semenov V.V. A Strongly Convergent Splitting Method for Systems of Operator Inclusions with Monotone Operators / V.V. Semenov // Journal of Automation and Information Sciences. - 2014, Volume 46. - Issue 5. - P. 45-56.

3. Semenov V.V. Hybrid Splitting Methods for the System of Operator Inclusions with Monotone Operators / V.V. Semenov // Cybernetics and Systems Analysis. - 2014, Volume 50. - Issue 5. - P. 741-749.

4. Malitsky Yu.V. An Extragradient Algorithm for Monotone Variational Inequalities / Yu.V. Malitsky, V.V. Semenov //Cybernetics and Systems Analysis. - 2014, Volume 50. - Issue 2. - P. 271-277.

5. Semenov V.V. Strongly Convergent Algorithms for Variational Inequality Problem over the Set of Solutions the Equilibrium Problems / V.V. Semenov // Continuous and Distributed Systems. Solid Mechanics and Its Applications, Volume 211. - Springer International Publishing Switzerland. - 2014. - P. 131-146.

6. Семенов В.В. Явный алгоритм расщепления для вариационных неравенств с монотонными операторами / В.В. Семенов // Журнал обчислювальної та прикладної математики. - 2013. - №2 (112). - С. 42-52.

7. Апостол Р.Я. Ітераційні алгоритми для монотонних дворівневих варіаційних нерівностей / Р.Я. Апостол, А.А. Гриненко, В.В. Семенов // Журнал обчислювальної та прикладної математики. - 2012. - №1 (107). - С. 3-14.

8. Войтова Т.А. Сильно збіжний модифікований варіант методу Корпелевич для задач рівноважного програмування / Т.А. Войтова, С.В. Денисов, В.В. Семенов // Журнал обчислювальної та прикладної математики. - 2011. - №1 (104). - С. 10-23.

9. Lyashko S.I. Low-cost modification of Korpelevich's methods for monotone equilibrium problems / S.I. Lyashko, V.V. Semenov, T.A. Voitova // Cybernetics and Systems Analysis. - 2011, Volume 47. - Issue 4. - P. 631-639.

10. Семенов В.В. О методе параллельной проксимальной декомпозиции для решения задач выпуклой оптимизации / В.В. Семенов // Проблемы управления и информатики. - 2010. - № 2. - С. 42-46.

Филер Семен Ефимович, доктор технических наук, кандидат физ.-мат. наук, профессор кафедры прикладной математики, статистики и экономики,
КДПУ имени Владимира Винниченко, Кировоград, Украина,
e-mail: filier@rambler.ru;
Шелуденко Анна Сергеевна, магистр прикладной и теоретической статистики,
КДПУ имени Владимира Винниченко, Кировоград, Украина,
e-mail: anytusinichka@mail.ru

УСТОЙЧИВОСТЬ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Филер С.Е., Шелуденко А.С.

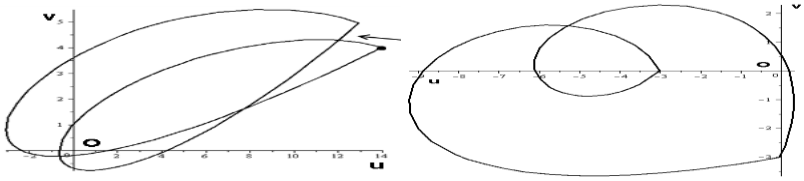
Для электромеханических систем используют уравнения Лагранжа-Максвелла, при построении которых используют квадратичные формы- кинетическую и потенциальную энергии T= $1/2(A\dot{x},\dot{x}), \Pi = 1/2(Cx,x)$ и диссипативной функции $\Phi = 1/2(B\dot{x},\dot{x})$. Для $n-$мерного вектора обобщённых координат получаем уравнения Лагранжа 2-го рода $A\ddot{x}+B\dot{x}+Cx=Q(t).$ Вектор обобщённых сил $Q(t)$ не влияет на устойчивость системы.

Для уравнения $A\ddot{x}+B\dot{x}+Cx=0$ с неизвестной k- столбцовой матрицей x (число столбцов n матрицы A равно числу строк матрицы x)поиск решения $x=H\exp(\lambda t)$ с постоянной матрицей H ведёт к системе $(A\lambda^2+B\lambda+C)H\exp(\lambda t)=0$, она имеет ненулевое решение H, если $\det(A\lambda^2+B\lambda+C)=0.$ Это даёт характеристическое уравнение, независящее от k. Функция $f(\lambda)=\det(A\lambda^2+B\lambda+C)$ даёт для установления устойчивости годограф Михайлова при $\lambda := i\omega.$ Его радиус-вектор при $\omega\in(0,\infty)$ (для действительных матриц A,B,C) делает поворот на угол $\pi/2\cdot n$ в случае асимптотической устойчивости. Это даёт функцию $F(\omega)=\det(C-A\omega^2+i\omega B)=u(\omega)+iv(\omega).$ Для её финитизации сделаем замену $(1-t)^{2n}F\left(t/(1-t)\right), 0<t<1,$ что даёт функцию $g(t)=\det(C(1-t)^2-At^2+it(1-t)B),$ годограф которой при изменении $t\in(0,1)$ конечен. Он и определяет устойчивость. При этом все корни характеристического уравнения лежат в левой *полуплоскости комплексного* $\lambda.$

Для комплексных матриц A, B, C финитизация достигается заменой $(1-|t|)^{2n}F\left(t/\left(1-|t|\right)\right), 0\le|t|<1.$ Дело в том, что в случае действительных матриц A, B, C корни комплексно сопряжённые и обход по прямой $\lambda := i\omega, -\infty<\omega<+\infty$ может быть заменён на обход вдоль полупрямой $0<\omega<+\infty$ [1].

В частности, для системы с комплексными матрицами и вектором $\bar{x}=(x_1,x_2)^T$ при

$A=\begin{bmatrix}9+i & 2+2i\\ 5-i & 3+i\end{bmatrix}$; $B=\begin{bmatrix}7+i & 5+2i\\ 2+i & 3-4i\end{bmatrix}$; $C=\begin{bmatrix}5+i & 2-2i\\ 1 & 3\end{bmatrix}$; $A=\begin{bmatrix}5+i & 2+2i\\ 5-i & 3+i\end{bmatrix}$; $B=\begin{bmatrix}7+i & 5-i\\ 2+i & 3-4i\end{bmatrix}$; $C=\begin{bmatrix}5+i & 2-2i\\ 1+4i & 3\end{bmatrix}$;



а) устойчивое б) неустойчивое

получаем годографы, изображённые на рис. 1.

Аналогично можно рассматривать системы уравнений первого порядка $B\dot{x}+Cx=0,$ не умножая её на обратную матрицу B^{-1}. Систему уравнений второго порядка заменой $\dot{x}=y$ можно свести к такой системе $2n$ уравнений.

1. Филер З.Е., Музыченко А.И. Устойчивость линейных механических систем с последействием// Прикл. механика, Т. 46, № 1, 2010. – С. 125 – 137.

Ясинский Владимир Кириллович, доктор физ.-мат. наук, профессор,
Черновицкий национальный университет имени Юрия Федьковича, Черновцы, Украина,
e-mail: yasinsk@list.ru
Савчук Богдан Васильевич, аспирант факультета математики и информатики,
Черновицкий национальный университет имени Юрия Федьковича, Черновцы, Украина,
e-mail: sbohdanv@gmail.com

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ В НЕЛИНЕЙНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО – ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ С МАРКОВСКИМИ ПАРАМЕТРАМИ И ВНЕШНИМИ СЛУЧАЙНЫМИ ВОЗМУЩЕНИЯМИ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ПРИРОДЫ

Ясинский В.К., Савчук Б.В.

На вероятностном базисе $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t, t \ge t_0 \ge 0\}, \boldsymbol{P})$ состояние реальной динамической системы задано случайным процессом $x(t) \equiv x(t,\omega) : [0;+\infty) \times \Omega \to R^n$ в качестве сильного решения нелинейного стохастического дифференциально-функционального уравнения с марковскими параметрами (НСДУсМП) и с конечным последействием

$$dx(t) = a(t, x_t, \xi(t), u)dt + l(\omega)b(t, x_t, \xi(t), u)dw(t) + \\ + \int_Z c(t, x_t, \xi(t), u, z)\nu(dt, dz) \qquad (1)$$

с внешними марковскими переключениями $\{\eta_k, k \ge 0\}$

$$\Delta x(t)\big|_{t=t_k} = g(t_k -), x(t_k -), \xi(t_k -), \eta(t_k -) \qquad (2)$$

и начальными условиями

$$x_{t_0} \equiv \{x(t_0 + \theta), -\tau \le \theta \le 0\} = \varphi(\theta) \in D(R^n), \xi(t_0) = y \in Y, \eta = h \in H\,. \qquad (3)$$

Тут $x_t \equiv \{x((t+\theta),\omega), -\tau \le \theta \le 0, \tau > 0\} \in D(R^n)$ – отрезок решения НСДУсМП (1) – (3) с переключениями в моменты времени $t_k \in S \equiv \{t_k \uparrow, k \in N\}, \lim\limits_{k\to\infty} t_k = +\infty$; $D(R^n)$ – пространство Скорохода непрерывных справа функций $x(t,\omega) \in R^n$, имеющие правосторонние пределы, как решение (1) – (3), $l(\omega)$ – случайная величина с известным законом распределения $F_z(x) \equiv P\{\omega : l(\omega) < x; \forall x \in R^1\}$; $\xi(t) \equiv \xi(t,\omega) : [t_0, \infty) \times \Omega \in R^m$ – марковский процесс;

$\eta(t_k) : [t_k, \infty) \times \Omega \to R^2$ – цепь Маркова; величина $u \equiv u(t,x,y,h) \in R^l$ – l-мерное управляющее воздействие.

Решена проблема асимптотической устойчивости по вероятности и в среднем квадратическом с помощью второго метода Ляпунова-Красовского системы (1) – (3). Приведены основные доказательства устойчивости по вероятности и в среднем квадратическом вторым методом Ляпунова – Красовского. Приведены достаточные условия оптимального управления решения (1) – (3) на бесконечности с внешними марковскими переключениями для заданной целевой функции $z(\omega)$.

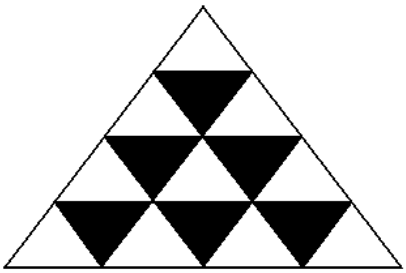
1. Андреева Е. А. Управление системами с последействием / Е. А. Андреева, В. Б. Колмановский, Л.Е. Шайхет. — М. : Наука, 1992. — 336 с.

2. Гихман И. И. Управляемые случайные процессы / И. И. Гихман, А. В. Скороход. – К.: Наук. думка, 1977. – 252 с.

3. Кац И. Я. Метод функций Ляпунова в задачах устойчивости и стабилизации систем случайной структуры / И. Я. Кац. – Екатеринбург : УГАПС, 1998. – 222 с.

DYNAMICAL SYSTEMS MODELLING

AND STABILITY INVESTIGATION



MODELLING

&

STABILITY

Section 5

LOGIC-MATHEMATICAL METHODS OF MODELING

Skobelev Volodymyr Gennadievich, Dr. of Phys.-Math. Sci., Dr., of Techn. Sci., Professor,
V.M. Glushkov Institute of Cybernetics of NAS of Ukraine, Kiev, Ukaine,
e-mail: vgskobelev@incyb.kiev.ua;

ON SOME PROBLEMS OF IT-SYSTEMS SECURITY

Skobelev V.G.

The given paper presents some brief survey of models and methods intended to provide information and functional security for modern IT-systems with the critical field of application. Information security of IT-system is determined by its protection from negative impacts on information resources, including the deliberate action aimed to misuse or distort information and programs that are designed to be used by some limited number of persons. Functional safety of IT-system is determined by its ability to resist display defects of programs, data, hardware and destabilizing effects of the environment, resulting in the loss of its working capacity, accidents and catastrophes.

It is well known that one of the main means for providing security of IT-systems are modern operation systems (OS). They include some combination of servers intended for identification, authentication, access control, logging, auditing, and encryption. In addition, every modern OS provides such basic infrastructure security properties as separation of domains intermediation while accessing. Current state of industrial development for the main types of servers has been discussed.

Security policy for any IT-system means some series of rules and regulations governing the processing of information, implementation of which should ensure the state of information security for the given space of threats. The main purpose of the security policy is to develop some effective system of managing security for the IT-system throughout its life cycle. Basic difficulties associated with the development of security policies for modern IT-systems has been summarized, some models and methods designed for elimination them have been presented.

The main types of testing in the process of development of IT-systems with the critical field of application have been described. The main components of verification in the process of the software development have been described. Formal models and methods used in this process have been considered. Methods of database protection have been presented shortly.

Some basic problems related to the safety of large-scale computer networks have been characterized. Among them are the following ones: community detection, social network analysis and development of systems intended for protection of networks.

Extensive list of publications in which above considered problems have been investigated is presented. Some basic problems related to providing security for modern IT-systems which were not considered in the given article have been listed.

Буряк Владимир Дмитриевич, аспирант,
Одесский национальный политехнический университет, Одесса, Украина,
e-mail: elvis.prsl91@gmail.com

УСКОРЕННЫЙ АЛГОРИТМ ИСЧИСЛЕНИЯ ПОРЯДКА И ОЦЕНКА ЕГО ЭФФЕКТИВНОСТИ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ ПРОЦЕССОВ СИСТЕМ ЗАЩИТЫ ИНФОРМАЦИИ

Буряк В.Д.

Задача дискретного логарифмирования является основной из задач, на которых базируется криптография с открытым ключом.Трудоемкость решения данной задачи положена в основу криптографической устойчивости многих алгоритмов ассиметричного шифрования, например, широко используемого криптоалгоритма RSA.На сегодняшний день известно множество алгоритмов для решения данной задачи. Среди них: алгоритм Шенкса, алгоритм Полига-Хеллмана, p-метод Полларда, алгоритм COS, алгоритм Адлемана, решето числового поля и др.Но данные алгоритмы довольно трудоемкие и сложные с вычислительной точки зрения. Так, если в некоторой конечной мультипликативной абелевой группе задано сравнение вида $y \equiv a^x (mod\ p)$,где $y,\ a$ являются элементами расширенного конечного поля $GF(q)$: $q = p^n$, p – простое число, $x \in GF(p-1)$, то, как известно, x может быть представлен в виде дискретного логарифма $x = log_a y (mod\ p-1)$. Сложность каждого из вышеуказанных алгоритмов $O\left(exp\, c(log\ p log\ log\ p)^{2^{-1}}\right)$ арифметических операций. Ввиду высокой практической ценности операции дискретного логарифмирования, для каждого используемого на практике простого модуля p составлены так называемые таблицы индексов, применяемые в современной теории передачи информации и криптографии.

В работе предлагается усовершенствованный,более ускоренный и более практичный, алгоритм исчисления порядка основанный на применении указанных таблиц индексов. Суть алгоритма состоит в том, что любое число n из таблицы индексов простого числа p, удовлетворяющее условию $n \le p-1$, можно представить в виде z_p^m, где z_p – минимальный первообразный корень модуля p; индекс $m = \overline{ij}$, где i –номер строки (указывает число десятков), j – номер столбца (указывает число единиц), на пересечении которых расположено число n, $\overline{ij}$ – означает, что число m находится на пересечении i-й строки и j-го столбца в таблице индексов.

В результате, при исчислении порядка предложенным методом, удалось снизить вычислительную сложность до величины $O(2log_2(p))$, по сравнению с оригинальным, известным ранее, алгоритмом исчисления порядка, вычислительная сложность которого $O\left(c_1 \cdot 2^{(c_2+o(1))\sqrt{log\ p log\ log\ p}}\right)$, где $c_1,\ c_2$ – некоторые константы, зависящие от хода промежуточных вычислений алгоритма, в частности, от выбора факторной базы. Важно и то, что предложенный ускоренный алгоритм исчисления порядка,в случае больших модулей p, может работать в составе оригинального алгоритма исчисления порядка для упрощения промежуточных вычислений.

В качестве иллюстрации были рассмотрены примеры и приведена блок-схема работыдвухалгоритмов исчисления порядка – оригинального и ускоренного, что наглядно показало насколько был усовершенствован стандартный алгоритм исчисления порядка.

Какойченко Андрій Ігорович, студент 1 курсу магістратури, факультет кібернетики,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
e-mail: a.kakoychenko@gmail.com;

ПРО РОЗРОБКУ ПРОГРАМНОГО КОМПЛЕКСУ ДЛЯ МОДЕЛЮВАННЯ ТА АНАЛІЗУ ДИНАМІКИ СТРОКОВОГО РИНКУ

Какойченко А.І.

У доповіді висвітлено процес розробки системи для накопичення історичних даних, тестування стратегій алгоритмічної торгівлі на історичних даних та аналізу мікроструктури строкового ринку (рис. 1). У даній системі використовуються найбільш деталізовані ринкові дані, які доступні на Українській та Московській біржах через пропрієтарні протоколи для прямого доступу, а саме, повний журнал заявок (full orders log), який являє собою впорядкований список угод та транзакцій про постановку та скасування заявок. Під час роботи тестового полігону відбувається моделювання неперервного двостороннього аукціону з врахуванням як транзакцій зі сховища історичних даних, так і транзакцій, які генерує модуль розрахунку стратегій у відповідь на ринкові дані. На основі змодельованого стану книги заявок відбувається моделювання ринкових даних, які включають оцінку впливу стратегії, що тестується, на стан ринку.

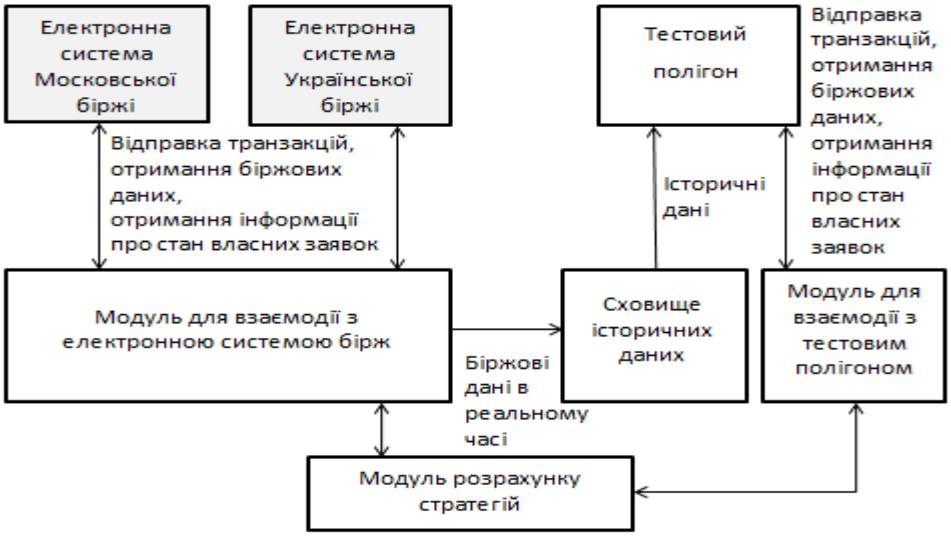


Рис.1 Блок-схема програмного комплексу

Для керування власними заявками використано скінченний автомат.

Для програмної реалізації використано мову програмування C# та окремі модулі на C++ для високонавантажених елементів системи.

Даний програмний комплекс дозволяє проводити розробку стратегій алгоритмічної торгівлі та статистичний аналіз мікроструктури ринку, що включає аналіз потоків заявок та стану книги заявок, та був використаний для написання [1], [2] та ряду інших робіт.

1. Какойченко А.І. Особливості використання стратегії статистичного арбітражу // Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичнінауки. – 2014. – №3. – С. 126-129.

2. Kakoichenko A. On Analysis of futures markets by Monte Carlo method. / A. Kakoichenko // Problems of decision making under uncertainties: international conference, September 1-5, 2014, Cesky Rudolec, Czech Republic: proceedings. – 2014. – P. 50.

Кожаметов Абат Турсумуратович, кандидат физ.-мат. наук, доцент кафедры Высшей математики
Нукусского филиала ТУИТ. Адрес для переписки – 742000, Нукус, ул. Бердаха, д. 107.
E mail: elmur_bes@umail.uz
Бабаджанов Элмурад Сатимбаевич, стар.преп. кафедры Информатика и информационных технологии
Нукусского филиала ТУИТ, Адрес для переписки – 742000, Нукус, ул. А.Досназаров д. 6/15.
E mail: elmur_bes@mail.ru.
Тайров Кудияр Бахтиярович, студент 3-курса Нукусского филиала ТУИТ.
Адрес для переписки – 742000, Нукус, ул. Ак туба, д. 17. Email:btayrov@umail.uz

ЭЛЕКТРОННАЯ РЕСУРСНАЯ БАЗА ДЛЯ ПОЛЬЗОВАТЕЛЕЙ

Кожаметов А.Т., Бабаджанов Э.С., Тайров К.Б.

Не секрет, что увеличение информации, веб сайтов и электронных ресурсов в сетях Интернет наряду с расширением возможностей пользователей порождает затруднения и проблемы при работе пользователей в глобальной сети. К таким проблемам можно отнести следующие:

Пользователь должен знать все информационные систем в сети Интернет, необходимых для дальнейшей работы;

Поиск необходимой информации в электронных ресурсах по тематике, новостях и форумах, а также необходимость отслеживания обновлений;

Необходимость регистрация для использования услуг и ресурсов сети, и введения логина и пароля каждый раз, когда возникает необходимость работы в этой системе;

Постоянный вход в системы обмена писем и сообщений;

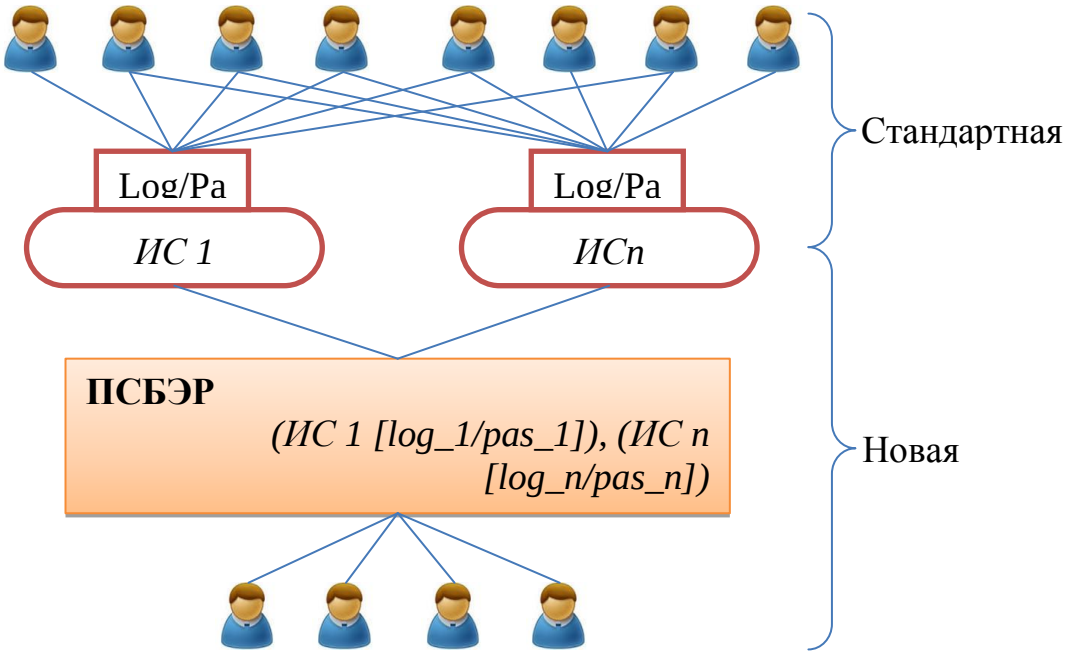
Использование специальных систем для хранения личной информации;

Не существования возможности использования услугами различных систем одновременно в одном окне;

И другие проблемы такого рода.

Ахборот тизимларидаги хизмат ва ресурсларидан фойдаланиш учун дастлаб

Для решения одновременно всех этих проблем необходимо создать специальную систему подобное социальным сетям, т.е. целесообразно создания обшей системы, которая бы хранила пользовательскую систему базы электронных ресурсов (ПСБЭР). Ниже приведено структура системы, которая предлагается для решений рассматриваемых проблем в сети Интернет.



Предлагаемая система ПСБЭР выполняет функцию личного кабинета пользователя в сети интернет и имеет следующие функциональные возможности:

Введения адреса и имени Интернет сайтов;

Заранее ввести логина и пароля для входа в систему и возможность входа в систему непосредственно.

Введение путей в полезные интернет ресурсы;

Объединение блоков социальных сетей и возможность ввести диалога в этом кабинете;

Автоматическое обновление тематических новостей;

Обновление новостей в системах обмена письмами и сообщениями и их использование;

Выбор методов шифрования для безопасной сохранности личной информации и личных электронных ресурсов;

Возможность создания личного веб сайта и секретности места хранения в системе;

Посредством личного сайта к некоторым дать возможность доступа к некоторым накопленным материалам, в виде публичности и группы.

Внедрение в практику предлагаемого модуля личного кабинета пользователя в глобальной сети способствует экономии времени и повышению эффективности работы пользователей.

Крак Юрій Васильович, докторфіз.-мат. наук, професор,
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,e-mail: yuri.krak@gmail.com;
ТерновАнтон Сергійович, кандидат технічних наук
Інститут кібернетики імені В.М.Глушкова, Київ, Україна,e-mail: anton.ternov@gmail.com;
Ульянич Данило Сергійович, студент 6-го курсу, фізико-технічний інститут,
Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут», Київ, Україна,
e-mail: dizcza@gmail.com

ПІДХІД ДО РОЗПІЗНАВАННЯ ЖЕСТІВ У НЕВЕЛИКИХ СЛОВНИКАХ

Крак Ю.В., Тернов А.С., Ульянич Д.С.

Для створення систем повноцінної підтримки інтерактивної взаємодії людини-носія жестової мови з комп'ютером у природній для людини спосіб необхідно розробити алгоритми розуміння комп'ютером жестикуляції людини, яка використовує жестову мову в якості засобу спілкування [1].

В даній роботі досліджено модель даних для розпізнавання жестів у невеликих словниках української жестової мови (до 200 жестів). Дані містять інформацію про 83 маркери (50 з них приходяться на обидві руки – по 25 маркерів на одну руку), які змінюють своє положення у часі з частотою 120 кадрів у секунду. Тривимірні координати рухів людини було отримано за технологією Motion Capture (MOCAP). Всього було отримано 139 унікальних жестів, які демонструвались одним актором: по 2 зразка для кожного жесту.

Запропоновано використовувати алгоритм динамічної згортки (DTW) та модифікований DTW з використанням ваг (WDTW) [2], які тим більші для окремого маркера чим більше цей маркер рухався у просторі на протязі демонстрації всього жесту. Для порівняння результатуроботи алгоритмів на розглянутій моделі даних була взята модель, дані для якої отримано за допомогою Microsoft Kinect сенсору [3]: 8 унікальних базових рухів руки по 28 екземплярів для кожного руху, 20 маркерів (по 3 маркери на кожну руку), частота - 30 кадрів у секунду. Попередня обробка даних включає: 1) нормалізацію даних з урахуванням відстані між лівим та правим плечем для вирівняння варіації щодо розміру персонажа; 2) центрування: для врахування випадків, коли персонаж знаходився не в центрі зору камери. Результати роботи алгоритмів на обох моделях даних подана у табл. 1.

Таблиця 1. Якість розпізнавання

Алгоритм	Базові рухи, Kinect	Малий словник УЖМ, MOCAP
DTW	77.3 %	100 %
WDTW	100 %	100 %

Стовідсоткова точність розпізнавання для обох алгоритмів на MOCAP даних є результатом їх ідеальності(велика точність визначення положення маркерів у просторі) та надлишковості: додаткові дослідження показали, що зменшення частоти відтворення до 30 кадрів у секунду не зменшують якості результату роботи алгоритмів.

1. Ю.Г. Кривонос, Ю.В. Крак, О.В. Бармак. Системи жестової комунікації: моделювання інформаційних процесів. – Київ: Наук. думка, 2014. – 228 с.

2. M. Reyes, G. Dominguez, S. Escalera Feature weighting in dynamic time warping for gesture recognition in depth data. In Computer Vision Workshops (ICCV Workshops), 2011 IEEE International Conference on, pp. 1182 –1188.

3. Sait Celebi, Ali S. Aydin, Talha T. Temiz and Tarik Arici, Gesture Recognition using Skeleton Data with Weighted Dynamic Time Warping // Multimed Tools Appl. – New York, Springer Science, 2014. – pp. 3045 –3062.

Мазурик Роман Володимирович, студент 4 курсу, факультет кібернетики,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
e-mail: r.mazuryk.ua@gmail.com
Шатирко Андрій Володимирович, кандидат фіз.-мат. наук , доцент,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна
e-mail:a_shatyrko@univ.kiev.ua

ДОСЛІДЖЕННЯ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ ПРОСТОРОВИХ ТРУБОПРОВІДНИХ СИСТЕМ

Мазурик Р.В,Шатирко А.В.

В роботі розглядається задача розрахунку напружено-деформованого стану **(**НДС**)** просторової моделі трубопроводу, що складається з наземної частини, перехідної ділянки між підземною й наземною частиною трубопроводу (з урахуванням фізико-механічних особливостей ґрунту) і підземної частини трубопроводу.

Розрахунок базується на методі початкових параметрів. Суть методу полягає в розбивці трубопроводу на ділянки, у межах яких немає зосереджених зусиль, а розподілені навантаження діють по всій довжині ділянки. Для такої ділянки складають рівняння переміщень точок і узагальнених зусиль для відомих внутрішніх зусиль і переміщень у його початку і для відомих прикладених зовнішніх розподілених зусиль по довжині ділянки.

Побудова розрахункової схеми здійснюється шляхом упорядкованого розміщення типових елементів трубопроводів системи в просторі. Ці елементи розділяються на три основних групи:

трубні елементи;

опори;

зосереджені зусилля.

При розрахунку трубопроводу відбувається обхід всіх його ділянок (включаючи опори), починаючи з початку першої ділянки та закінчуючи кінцем останньої. Для кожної ділянки записується 12 рівнянь зв'язку від 12-ти невідомих кінця ділянки із 12-тьма невідомими початку плюс 1-6 рівнянь для опори на кінці (залежно від типу опори)[1,2]. Для підземних фрагментів на підставі вихідних даних за фізико-механічними характеристиками ґрунту визначаються відповідні кількісні параметри, що описують опір ґрунту до поздовжніх і поперечних переміщень труби та її поворотів щодо поздовжньої осі. Остаточно, складається система лінійних алгебраїчних рівнянь, що розв’язуються методом Гаусса. У результаті розв’язку системи рівнянь визначаються переміщення, кути повороту й внутрішні зусилля на обох кінцях всіх ділянок. По отриманим у такий спосіб внутрішнім зусиллям знаходяться напруження в трубопроводі. Таким чином, можна визначити НДС трубопроводу при всіх можливих режимах його експлуатації й виявити його потенційно небезпечні ділянки.

На основі даного підходу створений програмний модуль що дозволяє побудувати просторову модель трубопроводу і розрахувати НДС на всіх його ділянках.

1. Орыняк, В.М. Тороп, В.А Ромащенко, С.В. Жураховский. Расчет пространственного разветвленного трубопровода в программном комплексе оценки прочности оборудования АЭС. // Пробл. прочности.-1998. - N1

2. Орыняк И.В., Радченко С.А. Анализ деформаций гиба трубы на основе смешанного подхода. Сообщ.1. Пространственный изгиб по Сен-Венану // Пробл. прочности. - 2004. – N3. – С. 23-51.

Матвіюк Дмитро Анатолійович, аспірант, математичний факультет,
Східноєвропейський національний університет імені Лесі Українки, Луцьк, Україна,
e-mail: dimmat25@gmail.com
Нікітченко Микола Степанович, доктор фіз.-мат. наук, професор,
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
e-mail: nikitchenko@unicyb.kiev.ua;

ВЕРИФІКАЦІЯ КОМПОЗИЦІЙНО-НОМІНАТИВНИХ ПРОГРАМ

Матвіюк Д.А., Нікітченко М.С.

Формальний метод в розробці програм – це математично обґрунтована методика опису властивостей програми та їх перевірки. Формальний метод реалізується у вигляді деякої мови специфікацій [1]. Будемо розглядати алгебраїчні специфікації програм, тобто специфікація програми буде будуватися на основі певної композиційно-номінативної алгебри.

У формальних методах перевірки програм між концепцією програми (формулюванням задачі замовником) і програмою вводиться проміжна ланка – специфікація, яка забезпечує математичний опис концепції і дозволяє встановлювати правильність програми шляхом доведення еквівалентності програми її специфікації. Специфікації програми будуються до безпосереднього кодування програми, це дозволяє краще зрозуміти принцип роботи програми і підвищує ймовірність, що кінцева програма буде відповідати вимогам замовника.

Фактично формальні специфікації є математичним поданням вимог замовника програми. Під час запису специфікації неформальна постановка задачі замовника записується з допомогою деякої формальної мови специфікацій. В нашому випадку розглядаємо композиційно-номінативну алгебру як спосіб запису специфікації. В процесі створення специфікації можуть виникнути наступні проблеми: концепція замовника описана неправильно, тоді кінцева програма не буде відповідати вимогам замовника; можуть бути помилки в самій специфікації, тобто неповнота специфікації і опис взаємно суперечливих тверджень. Щоб виключити подібні помилки специфікацію потрібно верифікувати.

Верифікація специфікацій в композиційно-номінативні алгебрі зводиться до перевірки виконуваності певної формули в даній алгебрі. Так, для формальних специфікацій можуть перевірятися властивості несуперечливості та повноти [2, 3].

В доповіді розглядаються методи перевірки виконуваності композиційно-номінативній специфікацій. Головна увага надається редукції цієї проблеми виконуваності до проблеми виконуваності в класичній логіці предикатів. Розроблено спеціальну програму ADM, що виконує вказані редукції. Це дозволяє встановити виконуваність формули, або формальну вивідність формули із заданої множини формул, використовуючи розроблені програмні засоби.

1. Агафонов В. Н. Спецификация программ: понятийные средства и их организация. / Агафонов В. Н. – Новосибирск: Наука, 1987.

2. Тимофєєв В. Г. Проблема виконуваності у пропозиційній та реномінативній композиційно-номінативній логіці / В. Г. Тимофєєв // Вісник київського національного університету імені Тараса Шевченка, серія фізико-математичні науки. – 2011. – №. 4. – С. 233–238.

3. Нікітченко М.С. Теорія програмування: [навчальний посібник] / М. С. Нікітченко. – Ніжин: Видавництво НДУ імені Миколи Гоголя, 2010. – 122 с.

Нікітченко Микола Степанович, докторфіз.-мат. наук, зав. кафедри теорії та технології програмування,
Шкільняк Оксана Степанівна, кандидатфіз.-мат. наук, доцент кафедри інформаційних систем,
Шкільняк Степан Степанович, докторфіз.-мат. наук, проф. кафедри теорії та технології програмування
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
e-mail: ttp@unicyb.kiev.ua, me.oksana@gmail.com

ЛОГІКИ КВАЗІАРНИХ ПРЕДИКАТІВ ІЗ УЗАГАЛЬНЕНИМИРЕНОМІНАЦІЯМИ ТА ПРЕДИКАТАМИ-ІНДИКАТОРАМИ НАЯВНОСТІ ЗНАЧЕННЯ ДЛЯ ЗМІННИХ

Нікітченко М.С., Шкільняк О.С., Шкільняк С.С.

Створення надійних і ефективних програмних систем із необхідністю вимагає застосування понять і методів математичної логіки. Для цього зазвичай використовують апарат класичної логіки предикатів. Проте класична логіка має [1] низку принципових обмежень, тому дуже важливою стає проблема побудови нових, програмно-орієнтованих логік. Природною основою такої побудови є спільний для логіки й програмування композиційно-номінативний підхід. Логіки, збудовані на його основі, названо композиційно-номінативними.

Дана доповідь присвячена дослідженню чистих першопорядкових композиційно-номінативних логік (ЧКНЛ) часткових однозначних, тотальних неоднозначних і часткових неоднозначних квазіарних предикатів. Розглянуто ЧКНЛ базового рівня та їх розширення:

– ЧКНЛРР – це ЧКНЛ із узагальненими реномінаціями;

– ε-ЧКНЛ – це ЧКНЛ із предикатами-індикаторами наявності значення для змінних;

– ε-ЧКНЛРР, які поєднують можливості ε-ЧКНЛі ЧКНЛРР.

Описано мови та семантичні моделі таких логік, досліджено їх семантичні властивості, зокрема, властивості, пов'язані з предикатами-індикаторами і узагальненими реномінаціями. Розглянуто властивості відношень логічного наслідку для множин формул $|=_{Cl}$, $|=_{Cm}$, $|=_{T}$, $|=_{F}$, $|=_{TF}$. Це зроблено для логікчасткових однозначних (неокласична семантика), тотальних неоднозначних (пересичена семантика) і часткових неоднозначних (загальна семантика) предикатів. Властивості цих відношень є семантичною основою побудови для ЧКНЛта їх розширень відповідних числень секвенційного типу. Такі числення наведено в наступній таблиці:

	$\|=_{Cl}$	$\|=_{Cm}$	$\|=_{T}$	$\|=_{F}$	$\|=_{TF}$
Неокласична семантика ЧКНЛ	*QSC*	–	*QSL*	*QSR*	*QSR*
Неокласична семантика ЧКНЛРР	$Q_{\perp}C$	–	$Q_{\perp}L$	$Q_{\perp}R$	$Q_{\perp}LR$
Неокласична семантикаε-ЧКНЛ	*QεC*	–	*QεL*	*QεR*	*QεLR*
Неокласична семантикаε-ЧКНЛРР	$Q_{\perp}\varepsilon C$	–	$Q_{\perp}\varepsilon L$	$Q_{\perp}\varepsilon R$	$Q_{\perp}\varepsilon LR$
Пересичена семантика ЧКНЛ	–	*QSC*	*QSR*	*QSL*	*QSLR*
Пересичена семантика ЧКНЛРР	–	$Q_{\perp}C$	$Q_{\perp}R$	$Q_{\perp}L$	$Q_{\perp}LR$
Пересичена семантикаε-ЧКНЛ	–	*QεC*	*QεR*	*QεL*	*QεLR*
Пересичена семантикаε-ЧКНЛРР	–	$Q_{\perp}\varepsilon C$	$Q_{\perp}\varepsilon R$	$Q_{\perp}\varepsilon L$	$Q_{\perp}\varepsilon LR$
Загальна семантика ЧКНЛ	–	–	*QSG*	*QSG*	*QSG*
Загальна семантика ЧКНЛРР	–	–	$Q_{\perp}G$	$Q_{\perp}G$	$Q_{\perp}G$
Загальна семантикаε-ЧКНЛ	–	–	*QεG*	*QεG*	*QεG*
Загальна семантикаε-ЧКНЛРР	–	–	$Q_{\perp}\varepsilon G$	$Q_{\perp}\varepsilon G$	$Q_{\perp}\varepsilon G$

Для побудованих секвенційних чисел доведено теоремикоректності та повноти.

1. Нікітченко М.С., Шкільняк С.С.Прикладна логіка. – К.: ВПЦ Київський університет, 2013. – 278 с.

2. Нікітченко М.С., Шкільняк О.С., Шкільняк С.С.Першопорядкові композиційно-номінативні логіки із узагальненими реномінаціями // Пробл. програмування. – 2014. – № 2–3. – С. 17–28.

Россада Тетяна Володимирівна, кандидат фіз.-мат. наук,
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
e-mail: t.rossada@gmail.com

МОДЕЛІ ЗНАНЬ З КВАЗИАРНИМИ ВІДОБРАЖЕННЯМИ

Россада Т.В.

Моделювання знань про предметну область (ПрО) є основою інтелектуальних автоматизованих систем (ІАС). В ІАС моделі знань реалізуються в рамках бази знань (БЗ). В даний час застосовуються сім класів БЗ: логічні, продукційні, фреймові, мережеві, об'єктно-орієнтовані, спеціальні та комплексні [1]. Повноцінні БЗ містять в собі не тільки фактичну інформацію, але і правила виведення, що допускають автоматичні умовиводи про нововведені факти і, як наслідок, осмислену обробку інформації [2].

У логічних моделях знання представляються у вигляді сукупності правильно побудованих формул будь-якої формальної системи (ФС). Під ФС розуміють трійку (L, A, P), де L – мова формальної системи, A – множина аксіом, P – множина правил виведення [3]. Найпростішою логічною моделлю є числення висловлювань.

Позитивними рисами логічних моделей знань є: високий рівень формалізації, що забезпечує можливість реалізації системи формально точних визначень і висновків; узгодженість знань як єдиного цілого, що полегшує вирішення проблем верифікації БЗ, оцінки незалежності та повноти системи аксіом тощо; єдині засоби опису як знань про ПрО, так і способів вирішення завдань у цій ПрО, що дозволяє будь-яке завдання звести до пошуку логічного висновку деякої формули в тій чи іншій ФС [1].

Мови представлення знань мають бути декларативними, композиційними, виразними, незалежними від контексту та несуперечливими [4]. Мова логіки першого порядку базується на поняттях об’єктів та відношень, вона є достатньо виразимою для того, щоб за її допомогою представити значну частину наших загальних знань, але недостатньо враховує неповноту та частковість інформації про предметну область, її структурованість [5].

У доповіді розглядаються шляхи підвищення ефективності логічних моделей знань, пов'язані з використанням композиційно-номінативних логік: логік квазиарних предикатів 1-го порядку [3, 5].

1. Башмаков А.И. Интеллектуальные информационные технологии / А.И. Башмаков, И.А. Башмаков. М.: «МГТУ имени Н.Э. Баумана», 2005. — 304 с.

2. Гаврилова и др. Базы знаний интеллектуальных систем // Учебник для вузов. — СПб.: Питер, 2000. — 384 с.

3. Нікітченко М.С. Математична логіка. Навчальний посібник / М.С. Нікітченко, С.С. Шкільняк. К.: ВПЦ Київський університет, 2003. — 120 с.

4. Рассел С. Искусственный интеллект. Современный поход / Стюарт Рассел, Питер Норвиг. М: «Вильямс», 2006 — 1408 с.

5. Нікітченко М.С., Шкільняк С.С. Композиційно-номінативні логіки кванторно-еквaційного рівня // Вісник Київського ун-ту. Серія: кібернетика. – 2011. – Вип. 11. – С. 32–40.

Тлебалдинова Айджан Солтангалиевна, докторант,
Восточно-Казахстанский государственный технический университет имени Д.Серикбаева, Усть-Каменогорск, Казахстан, e-mail: a_tlebaldinova@mail.ru;
Денисова Наталья Федоровна, кандидат физико-математических наук,
Восточно-Казахстанский государственный технический университет имени Д.Серикбаева, Усть-Каменогорск, Казахстан, e-mail: NDenisova@ektu.kz;
Крак Юрий Васильевич, доктор физико-математических наук, профессор,
Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, Киев, Украина, e-mail: krak@unicyb.kiev.ua

АЛГОРИТМ ЛОКАЛИЗАЦИИ И РАСПОЗНАВАНИЯ НОМЕРНЫХ ЗНАКОВ ТРАНСПОРТНЫХ СРЕДСТВ

Тлебалдинова А.С, Денисова Н.Ф., Крак Ю.В.

В докладе предложен алгоритм локализации и распознавания номерных знаков [1], основанный на методе машинного обучения. Построение модели обучения состоит из основных двух этапов: извлечение характерных признаков и тренировка модели на полученных признаках для распознавания. Для получения векторов-признаков поверхности номера на изображении и символьной информации используется метод гистограмм направленных градиентов (HOG) [2], преимуществами которого являются: инвариантность к геометрическим и фотометрическим искажениям, к степени освещенности и к размеру скользящего окна. Классификация номерных знаков осуществляется с помощью метода опорных векторов (SVM). Для ускорения процесса локализации номерного знака, необходимо уточнить область с номерным знаком, с целью осуществления поиска именно в выделенной зоне, а не по всему изображению. Для нахождения зоны локализации номерного знака необходимо обучить классификатор SVM. Для уточнения области с номерным знаком было протестировано 1400 реальных изображений, которые разделены на два класса. Из них 1000 были использованы в качестве положительных, 400 в качестве негативных изображений. Данная выборка содержит изображения с однострочными номерными знаками, которые были сняты в реальных условиях с помощью обычных веб-камер и цифровых фотоаппаратов. Все изображения были нормализованы до 152×32. Размер блока составил 16×16, размер ячеек 8×8. Для нормализации блоков использован метод L2-норма. Ускорение процесса обнаружения зависит от соотношения области с передней либо задней частью автомобиля на область всего изображения. Результаты работы алгоритма на базе HOG+SVM показали уровень точного распознавания 75,1%.

Предложенный алгоритм используется также для идентификации символьных значений номерного знака. Принцип обучения остается тем же, с той лишь разницей, что обучение необходимо провести для всех символов которые встречаются в номерных знаках (цифры 0-9, буквы A, B, C, D, E, F, H, I, K, L, M, N, O, P, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z). Тестирование предложенного алгоритма для распознавания номерных знаков показало эффективность на уровне результатов по локализации области номерных знаков.

Дальнейшие исследования будут направлены на усовершенствование предложенного подхода.

1. Tlebaldinova A.S. The development of a model of a number plate recognition system control in real time / A.S. Tlebaldinova, N.F.Denissova // Theoretical & Applied Science. – 2014 – № 4 (12). – P.16-20.

2. Dalal N.Histograms of oriented gradients for human detection / N. Dalal, B. Triggs //Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR). – San Diego, IEEE, 2005. – Vol.1. – P.886-893.

Shatyrko Oleksandra, consultant in Urban, Rural & Social Development Department and in ECA Country Unit IT department, *World Bank Office, IBRD Department in Kyiv, Ukraine,*
e-mail: alexshatyrko@gmail.com

EXPERT WEB-DATABASE WITH FUCTIONAL ABILITIES FOR THE WORLD BANK UKRAINE OFFICE

Shatyrko Oleksandra

For the World Bank Ukraine Office (International Bank for Reconstruction and Development) was created the special, unique Media and Expert Contacts Web-Database.

For this purpose used the PHP - server-side scripting language designed for web development but also used as a general-purpose programming language, the programmed code was mixed with HTML code and used in combination of various templating engines and web frameworks, specifically with the phpMyAdmin a free software tool written in PHP, intended to handle the administration of MySQL over the Web. phpMyAdmin supports a wide range of operations on MySQL -relational database management system (RDBMS) the world's most popular open source database, enabling the cost-effective delivery of reliable, high-performance and scalable Web-based and embedded database applications and ships with no GUI (graphical user interface) tools to administer MySQL databases or manage data contained within the databases.

According to this project was developed frequently used operations as managing databases, tables, columns, relations, indexes, users, permissions and programmed strong safety aspects, this functions can be performed via the user interface, while you still have the ability to directly execute any SQL statement.

Were performed easy to use for the uninitiated in the programming users web interface; programmed searching globally in a database or a subset of it; execute, edit and bookmark any SQL-statement; manage MySQL users and privileges; create, copy, drop, browse, rename and alter databases, tables, fields and indexes; import data; export data to various formats: CSV, SQL, XML, PDF, OpenDocument Text and Spreadsheet, Word.

This Media and Expert Web-database presented in the Internet with the restriction of access for various set users roles depending on the required defined provided for users opportunities.

Designed and developed Web-database widely used by the Ukraine World Bank Group Staff members currently.

1. Larry Ullman, PHP Advanced and Object-Oriented Programming: Visual QuickPro Guide (3rd Edition), September 23, 2011.

2. Robin Nixon, Learning PHP, MySQL & JavaScript: With jQuery, CSS & HTML5, December 14, 2013.

Шевчук Роман Петрович, студент 4 курсу, факультет кібернетики,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
e-mail: romms@unicyb.kiev.ua

ІНТЕРНЕТ ПОРТАЛ ДЛЯ ПІДТРИМКИ ПЕДАГОГІЧНИХ ДОСЛІДЖЕНЬ МЕТОДОМ СЕМАНТИЧНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛУ

Шевчук Р. П.

Становлення сучасного інформаційного суспільства зумовлює розвиток педагогічної галузі, впровадження різноманітних новітніх технологій навчання, що потребують ретельної експериментальної перевірки. Деякі методики педагогічних досліджень, зокрема метод семантичного диференціалу, спираються на великі за обсягом експериментальні дані.

Семантичний диференціал— метод психолінгвістики започаткований Чарльзом Осгудом у 1952 р.[1]. Метод семантичного диференціалу для визначення ефективності педагогічних експериментальних впроваджень активно використовували С. Г. Литвинова [2], Я. З. Василькевич[3], Ю. О. Жук[4], О. П. Пинчук[4] та інші. Використання, у процесі таких досліджень, спеціально розроблених сервісів Інтернету дозволяє значно полегшити збір та обробку експериментальних даних.

У 2014 році в рамках Всеукраїнського проекту "Хмарні сервіси в освіті" (Наказ МОН України від 21.05.14 № 629, керівник к.п.н. Литвинова С. Г.) розпочато педагогічний експеримент використання хмарних технологій в освіті. Визначення ефективності впровадженняздійснюється методом семантичного диференціалу [2]. Для проведення вказаного дослідження розроблено портал «Система проведення досліджень» розміщений за адресою:http://expert.obolon365.net/. Використання порталу дозволяє практично одночасно проходити опитування всім учасникам експерименту, суттєво спрощує збір експериментальних даних.

Опитування кожного респондента це відвідування сайту - реєстрація та анкетування. Коли опитування доводиться перервати система забезпечує можливість його продовжити.

Після накопичення даних опитування визначається середнє квадратичне відхилення. Далі автоматично обираються семантичні пари з найменшим відхилення для кожної групи характеристик. Також дослідник може самостійно коректуватидобір таких пар. Результатом обробки даних засобами порталу є вихідна таблиця де зібрана статистика оцінок.

Подальший розвиток засобів Інтернет для збору та обробки експериментальних даних педагогічних досліджень потребує гнучкого поєднання у одній системі різних дослідницьких методів. Існують передумови для подальшого розвитку як розглянутого Інтернет порталу так і інших подібних систем.

1. Osgood C. E. The Measurement of Meaning / C. E. Osgood, G. J. Suci, P. H. Tannenbaum – Urbana.: – 1957. – pp 290–304.

2. Литвинова С.Г. Семантичний диференціал як метод наукового дослідження хмаро орієнтованого навчального середовища ЗНЗ / С.Г.Литвинова // Науковий вісник. – Випуск 2(13). – Серія : Педагогіка. – Мелітополь : МДПУ ім. Б. Хмельницького, 2014. – С.147-158.

3. Василькевич Я. З. Семантичний диференціал як метод психологічного аналізу особистісного смислоутворення / Я.З.Василькевич // Психолінгвістика. - 2009. - Вип. 3. - С. 34-40. - Режим доступу: http://nbuv.gov.ua/j-pdf/psling_2009_3_4.pdf

4. Пінчук О. П. Оцінювання рівня сформованості предметних компетентностей учнів основної школи методом семантичного диференціала в процесі навчання фізики / Ю. О. Жук, О. П. Пінчук // Наук. часопис НПУ ім.. М. П. Драгоманова. Серія № 5. Пед. науки: реалії та перспективи. – Вип. 12: Зб. наук. пр. – К.: Вид-во НПУ ім. М. П. Драгоманова, 2008. – С. 120–127..

Шкільняк Оксана Степанівна, кандидатфіз.-мат. наук, доцент кафедри інформаційних систем
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
e-mail: me.oksana@gmail.com

ТРАНЗИЦІЙНІ МОДАЛЬНІ ЛОГІКИНЕМОНОТОННИХ ЧАСТКОВИХ ПРЕДИКАТІВ

Шкільняк О.С.

Для опису й моделювання різноманітних предметних областей з великим успіхом використовується апарат модальних логік. Темпоральні логіки застосовуються для специфікації й верифікації програм, моделювання складних динамічних систем. Епістемічні логіки використовуються для опису інформаційних та експертних систем, баз даних і баз знань з неповною інформацією.Можливості композиційно-номінативних логік часткових квазіарних предикатів [1] і традиційних модальних логік поєднують композиційно-номінативні модальні логіки (КНМЛ).Транзиційні модальні логіки (ТМЛ) відбивають аспект зміни й розвитку предметних областей, вони є найважливішим класом КНМЛ.

В данійдоповідізапропоновано нові класи КНМЛ –чисті першопорядкові ТМЛ часткових квазіарних предикатів, не обмежених умовою монотонності. Центральним для ТМЛ є поняття транзиційної модальної системи (ТМС). Це об'єкт вигляду (Cms, Fm, Im), де Cms – композиційна модальна система (КМС), вона задає семантичні аспекти світу, Fm – множина формул відповідної мови, Im – відображення інтерпретації формул на станах світу. КМС мають вигляд $Cms = (S, R, Pr, C)$, де S – множина станів світу, R – множина відношень на S вигляду $\rho \subseteq S \times S$ (трактуємо їх як відношення переходу на станах), Pr – множина предикатів на станах, C – множина композицій на Pr. Для чистих першопорядкових ТМС S – це множина алгебраїчних систем вигляду $\alpha = (A_\alpha, Pr_\alpha)$, де Pr_α – множина квазіарних предикатів вигляду ${}^{V}A_\alpha \to \{T, F\}$ (предикати стану α). Предикати вигляду ${}^{V}A \to \{T, F\}$, де $A = \bigcup\limits_{\alpha \in S} A_\alpha$, назвемо глобальними. Множина Cвизначається базовими загальнологічними композиціями $\neg$, $\vee$, $\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{y}}$, $\exists x$ та базовими модальними композиціями.

Предикат P еквітонний (монотонний),якщо: $P(d)\downarrow$ та $d \subseteq d' \Rightarrow P(d')\downarrow = P(d)$.

ТМС із множиною відношень $R = \{\triangleright_i \mid i \in I\}$ та базовими модальними композиціями $К_i$, $i \in I$, у якихкожному $\triangleright_i \in R$ зіставлено відповідну $К_i$, назвемо *мультимодальними*. *Загальні* ТМС є окремим випадкоммультимодальних, для них R складається з єдиного відношення та наявна єдина базова модальна композиція$\Box$. ТМС, у яких Rскладається з єдиного бінарного відношення, а базовими модальними композиціями є $\Box_\uparrow$ та $\Box_\downarrow$, називають *темпоральними*.

Описано семантичні моделі та мови чистих першопорядкових ТМЛ зазначених класів, розглянуто їх семантичні властивості. Показана відмінність введених класів ТМЛ немонотонних предикатів та відповідних класів ТМЛ монотонних предикатів.

Дається визначення неокласичного $|=_{Cl}$, істиннісного $|=_T$, хибнісного $|=_F$ та сильного $|=_{TF}$логічного наслідку для множин специфікованих станами формул. Описано властивості цих відношень. Для відношення $|=_{Cl}$ різних класів ТМЛ немонотонних предикатів збудовано числення секвенційного типу, для цих числень доведено теореми коректності й повноти. Для відношень $|=_T$, $|=_F$ та $|=_{TF}$ подібні числення планується побудувати в наступних роботах.

1. Оксана Шкильняк. Модальные логики частичных предикатов и секвенциальные системы логического вывода в этих логик//InformationTheoriesandApplications: InternatinalJournal. – Sofia, Bulgaria, 2013. – Vol. 20. – № 4. – p. 367–378.

2. Шкільняк О.С. Транзиційні модальні логіки немонотонних квазіарних предикатів // Компъютерная математика. – 2014. – Вып. 2. – С. 99–110.

Шкільняк Степан Степанович, докторфіз.-мат. наук, проф. кафедри теорії та технології програмування,
Волковицький Дмитро Борисович, аспірант кафедри теорії та технології програмування
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
e-mail: ttp@unicyb.kiev.ua

БЕЗКВАНТОРНІ КОМПОЗИЦІЙНО-НОМІНАТИВНІ ЛОГІКИ КВАЗІАРНИХ ПРЕДИКАТІВ

Шкільняк С.С., Волковицький Д.Б.

Розвиток інформаційних технологій веде до розширення сфери застосування математичної логіки. Розроблено багато різноманітних логічних систем, які успішно використовуються в інформатиці й програмуванні. Такі системи зазвичай базуються на класичній логіці предикатів. Проте принципові обмеження класичної логіки (див. [1])виводять на перший план проблему побудови нових, програмно-орієнтованих логічних формалізмів. Такими є композиційно-номінативні логіки (КНЛ). Вони базуються на загальних класах часткових відображень, заданих на наборах іменованих значень – квазіарних відображень.

В доповіді пропонуються нові класи КНЛ – безквантворні логіки квазіарних предикатів. Вони займають проміжне становище між пропозиційною логікою і першопорядковими КНЛ. В безквантворних логіках не використовуємо композиції квантифікації, характерні для першопорядкових логік. Безквантворний рівень розпадається на низку підрівнів (в дужках їх назва):

– реномінативний (РНЛ);
– реномінативний з рівністю (РНЛР);
– реномінативний з строгою рівністю (РНЛРС);
– безквантворно-функціональний (БКНЛ);
– безквантворно-функціональний з рівністю (БКНЛР);
– безквантворно-функціональний з строгою рівністю (БКНЛРС).

Базовими композиціями РНЛ є $\neg,\vee$ та реномінація $R^{\bar{v}}_{\bar{x}}$.

На наступних двох підрівнях додатково вводимо спеціальні 0-арні композиції – параметризовані за іменами предикати рівності. Розглядаємо [2] дві різновидності таких предикатів: слабкої (з точністю до визначеності) рівності $=_{xy}$ та строгої (точної) рівності $\equiv_{xy}$.

Базові композиції РНЛР: $\neg,\vee$, $R^{\bar{v}}_{\bar{x}}$, $=_{xy}$. Базові композиції РНЛРС: $\neg,\vee$, $R^{\bar{v}}_{\bar{x}}$, $\equiv_{xy}$.

Характерна особливість безквантворно-функціональних логік – наявність композицій суперпозиції $S^{\bar{x}}$ та 0-арних композицій деномінації (розіменування) $'\boldsymbol{x}$. Базовими композиціямиБКНЛ є $\neg,\vee$, $S^{\bar{x}}$, $'\boldsymbol{x}$ (реномінації моделюємо за допомогою суперпозицій і деномінацій).

Для безквантворно-функціональних логік з рівністю додатково вводимо композицію рівності. Розглядаємо дві різновидності цієї композиції: слабкої рівності = та строгої рівності ≡.

Базові композиціїБКНЛР:$\neg$, $\vee$, $S^{\bar{x}}$, $'\boldsymbol{x}$, =. Базові композиціїБКНЛРС: $\neg$, $\vee$, $S^{\bar{x}}$, $'\boldsymbol{x}$, ≡.

Композиції $\neg,\vee$, $R^{\bar{v}}_{\bar{x}}$,$S^{\bar{v}}$, $'\boldsymbol{x}$,= зберігають еквітонність квазіарних функцій та предикатів. Водночас композиція≡еквітонність не зберігає, а предикати $\equiv_{xy}$ не є еквітонними.

Описано семантичні моделі та мови РНЛ, РНЛР, РНЛРС, БКНЛ, БКНЛР, БКНЛРС.

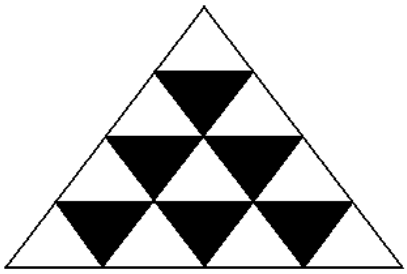
Досліджено властивості зазначених класів безквантворних логік. Розглянуто властивості відношень логічного наслідку для пар та для множин формул. Такі властивості є семантичною основою побудови секвенційних числень для пропонованих логік.

1. Нікітченко М.С., Шкільняк С.С.Прикладна логіка. – К.: ВПЦ Київський університет, 2013. – 278 с.

2. Шкільняк С.С., Волковицький Д.Б. Реномінативні композиційно-номінативні логіки з предикатами рівності// Вісник Київ. ун-ту. Сер.: фіз.-мат. науки. – 2014. – Вип. 3. – С. 195–202.

DYNAMICAL SYSTEMS MODELLING

AND STABILITY INVESTIGATION



MODELLING
&
STABILITY

Section 6

MODELING IN ECONOMY AND ECOLOGY

KoshmanenkoVolodymyrDmytrovych , Dr. Sci. (Phys.–Math.), Prof. ,
Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, Ukraine ,
e-mail: koshman63@googlemail.com ;
Karataeva Tetyana Valerivna, Cand. Sci. (Phys.–Math.),
Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, Ukraine,
e-mail: karat@imath.kiev.ua;

CYCLIC MODEL OF FIRE-WATER CONFLICT

Koshmanenko V.D., Karataeva T.V.

We study the model of the dynamical system of conflict interaction between heat energy F and water W with permanent periodical external replenishment of energy and internal mixing process of water. F and W are distributed along a circle Ω which is divided into $n \geq 2$ sections (regions) and are given by a couple of stochastic vectors $p, r \in \mathbb{R}^n_{+,1}$:

$$p = (p_1, \cdots p_n),\ r = (r_1, \cdots r_n),\ p_k, r_k \geq 0,\ k = 1, ..., n$$
$$p_1 + \cdots + p_n = 1 = r_1 + \cdots + r_n .$$

The model is generated by nonlinear mapping:

$$\mathbb{R}^n_{+,1} \times \mathbb{R}^n_{+,1} \ni \{p^N, r^N\} \overset{*}{\to} \{p^{N+1}, r^{N+1}\} \in \mathbb{R}^n_{+,1} \times \mathbb{R}^n_{+,1},\ N = 0,1,... \tag{1}$$

which is defined in terms of coordinates as follows:

$$p_i^{N+1} = \frac{\tilde{p}_i^N (1 - \tilde{r}_i^N)}{c^N},\ r_i^{N+1} = \frac{\tilde{r}_i^N (1 - \tilde{p}_i^N)}{c^N},\ i = 1, ..., n, \tag{2}$$

with

$$\tilde{p}_i^N = \frac{p_i^N + s_i^N}{z_p^N},\ \tilde{r}_i^N = \frac{r_i^N + h_i^N}{z_r^N}, \tag{3}$$

$$s_i^N := s_{i+N},\ h_i^N := h_{i+N},\ 1 \leq i \leq n,\ s_{i+n} = s_i,\ h_{i+n} = h_i, \tag{4}$$

where $s_1, ..., s_n \geq 0$, and $h_1, ..., h_n \geq 0$ are some fixed sets of nonnegative numbers and z_p^N, z_p^N, c^N stand for the normalizing denominators.

The behavior of trajectories of the dynamical system is investigated. For this model we proved the exitance of periodical orbits and the convergence of trajectories to the ω-limit cyclic states [1].

1. Karataieva T. , Koshmanenko V., The model of the conflict dynamical system of type '" Fire - Water ", Nonlinear Oscillations, 17, 2, (2014), P. 228-247.

VergunovaIrynaMykolayivna, Hab. Dr., Prof.,
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine,
e-mail: vergunova@bigmir.net

THE METHOD OF OPTIMIZATION OF AGROTECHNOLOGICAL SCHEMES FOR STRATEGIC CONTROL LEVEL

Vergunova I.M.

Identify two types of controls for cultivation technology: the first - controls that affect mainly on the current state of the crop and operate over the growing season (operational), the second - controls that determine the overall level of processes in the field and act as a background on which are imposed controls of the first type (strategic). The algorithm of optimization of agrotechnological schemes is the optimization algorithm at the strategic level. In it does not take into account existing weather (the deviations from the average forecast) and the current state of crops (deviations from the standard due to unexpected changes of weather or phytosanitary state) [1].

Let technological process may include M agromeasure, where $\Psi_i, i=\overline{1,M}$ - parameter that determines the occurrence of *i*-th technological operation to completely technological process. Each Ψ_i corresponds the destination code δ_i, $\delta_i \in [0,1]$. Running because our system is a dynamic system with qualitative descriptions of dynamics, which is based on the obtained set of input and output data $(x_1(k), x_2(k), \ldots, x_M(k), y(k))$, $k=1,\ldots,K$, it can be represented as:

$$IF\ x_1(k) is \Psi_{j1}\ \text{AND}\ x_2(k) is \Psi_{j2}\ \text{AND}\ \ldots \text{AND}\ x_M(k) is \Psi_{jM}$$

$$THEN\ y(k) = c_{j0} + \sum_{l=1}^{M} c_{jl} x_l(k),\ \ j=1,\ldots N, k=1,\ldots,K.$$

In it c_{j0} - the generalized expert evaluation concerning the necessary fertilizers and herbicides in terms of cost and productivity, c_{jl} - the generalized expert evaluation of agromeasure in terms of cost and productivity.

Carrying out of agrotechnological optimization schemes according to the criteria of cost and yield can be reduced to the problem of learning consequent centroids y_j^*, $j=1,\ldots N$ as a solution of a set of linear equations $V_j^T Y^* = y_j$, $j=1,\ldots,N$, using the Kalman filter method. This method is based on a minimization of the square instantaneous error:

$$E_j = (y - y_j)^2 \text{ and } E = \sum_{j=1}^{N} (y - y_j)^2 = \left\| Y - VY^* \right\|.$$

Using the recursive Kalman filter [2]

$$Y_{s+1}^* = Y_s^* + W_{s+1} V_{s+1} (y_{s+1} - V_{s+1}^T Y_s^*),$$

$$W_{s+1} = W_s - \frac{W_s V_{s+1} V_{s+1}^T W_s}{1 + V_{s+1}^T W_s V_{s+1}},\ y_s = V_s^T Y_s^* + \xi_s, s=0,\ldots s-1,$$

we get the best estimate of the state vector of the system (ξ_s - Gaussian white noise with covariance r_s).

3. Вергунов В.А. Методичні рекомендації з вибору оптимальних технологій вирощування культур за їх формалізованими описами / В.А. Вергунов, І.М. Вергунова. – К., 2010. – 64 с.

4. Yager Ronald R. Essentials of Fuzzy Modeling and Control / Ronald R. Yager, Dimitar P. Filev. – A Wiley–Interscience Publication, John Wiley & Sons, Inc., 1994. – 390 p.

Baranovska Lesia Valeriivna, PhD, associate professor,
National Technical University of Ukraine "Kyiv Polytechnic Institute", Kyiv, Ukraine,
e-mail: Lesia@baranovsky.org

MECHANISM DESIGN IN SOME VOTING AS AN OPTIMIZATION PROBLEM

Baranovska L.V.

We introduced a very central area of game theory called mechanism design [1]. It has many important throughout economics. In mechanism design we get to design the game. So as to optimize for certain qualities. Think for example about voting. It is assumed that the participants, or agents, know their preferences and the goal of the mechanism is to extract this information to a sufficient extent, and select an outcome such that desirable properties are achieved.

Consider a voting with 3 players (1, 2, 3) and 2 alternatives (*A*, *B*). Each player has a strict preference, and prefers *A* or *B* with equal probability. Each player gets 5 if his/her top choice is selected and 0 otherwise.

We get to design the voting rules. Let's construct the following 2 voting rules with transferable utility: in both cases, each player $i \in \{1, 2, 3\}$ submits one vote $v_i \in \{A,B\}$:

(i) The winning alternative, *w*, is uniformly randomly chosen from the 3 votes submitted by the 3 players, and there is no transfer.

(ii) The winning alternative, *w*, is chosen under the same rule as in (i). Players with $v_i = w$ pay 1, and players with $v_i \neq w$ get 1.

For example under (ii), if player 1 prefers *A*, votes *A* and $w=v_1=A$ is selected to be the winning alternative, player 1 gets 5 because *A* wins, pays 1 because $v_1=A$, and thus gets a net payoff 4.

We have proved that both (i) and (ii)voting rules are truthful (so that voting for a player's most preferred alternative is a dominant strategy) [2], efficient (in terms of always choosing an outcome that maximizes the total sum of utilities), interim individually rational (under truthful reporting). Only (ii) voting rule is budget balanced, earns a higher expected revenue and gives a higher maxmin fairness (a higher lowest utility).

1. Hurwicz L. The design of mechanisms for resource allocation // American Economic Review. 1973. − Vol. 63. − N. 2. − P. 1-30.

2. Shoham Y., Leyton-Brown K. Multiagent Systems: Algorithmic, Game-Theoretic, and Logical Foundations. – Cambridge University Press, 2009. – 504 p.

Бойко Наталія Віталіївна, магістр 1 курс
Київський національний університет імені Тараса Шевченко, Київ, Україна
e-mail: boikon13@ukr.net

ПРО ОДИН ПІДХІД ЩОДО МОДЕЛЮВАННЯ Й УПРАВЛІННЯ ПОРТФЕЛЯМИ ІТ ПРОЕКТІВ

Бойко Н. В.

Нагальною задачею сьогодення є ранжування портфелю ІТ проектів в умовах обмеженості фінансових ресурсів та строків виконання. Тому виникає задача рейтингування ІТ проектів відносно часу та наявного фінансування.

Прийняття проектних рішень, як і будь-який інший вид управлінської діяльності, ґрунтується на використанні різноманітних формалізованих і неформалізованих підходів. Формальні методи передбачають використання математичного апарату для розрахунку показників ефективності, неформальні - евристичних підходів до оцінки проектів метою досягнення максимальної ефективності.

В роботі пропонується застосувати модельний підхід щодо аналізу ефективності впровадження того чи іншого ІТ проекту з множини можливих, враховуючи фінансові, часові, стратегічні ресурси та виклики сьогодення.

Метою наукового дослідження є побудова інноваційного підходу щодо ефективного рейтингування ІТ проектів на основі формальних та неформальних методів. Сенергія таких підходів дозволяє виопрацювати методи та системи прийняття рішень щодо ефективного управління портфелями проектів відносно термінів виконання та наявного фінансування.

При цьому дослідження проводиться на засадах системного аналізу, який передбачає поєднання в одній тріаді таких складових: аналіз, синтез, оптимізація. Вказана концепція дозволяє досягти оптимальних рішень в умовах обмежених ресурсів, що характерна для досліджуваної проблеми.

Застосування запропонованих методів дозволить сформулювати економіко-математичну модель, що відображає процеси управління проектами.

Аналіз запропонованої моделі дозволив визначити ефективність кожного з проектів та витрати праці по кожному виду діяльності в умовах встановленого терміну виконання. Зокрема, встановлено ефективність кожного з проектів.

Запропонований підхід може бути розвинений у подальшому на випадок врахування ймовіросних характеристик складових ІТ проекту, що притаманна характеристикам сучасного розвитку ІТ ринку в Україні.

1. Бень Т. Методи визначення економічної ефективності інвестицій: порівняльний аналіз // Економіка України. -2006. -№7. - с.41-46.

2. Гвоздецька І. Теоретико-методичні засади оцінювання інвестиційної привабливості промислових підприємств // Збірник тез доповідей Третьої міжнародної науково-практичної конференції молодих вчених (Тернопіль, 23-24 лютого 2006 року). -Тернопіль: Економічна думка, 2006. - с. 196.

3. Захарін С. Інвестиційне забезпечення відтворення основних фондів // Економіка України. -2007. -№7. - с.43-51.

4. Лімітовскій М.А. Основи оцінки інвестиційних та фінансових рішень. -М.: Декан, 1996.

Гаркуша Наталія Іванівна, кандидат економічнихнаук,
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
e-mail: ngarkusha@gmail.com

ПРО ОДНУ МАТЕМАТИЧНУ МОДЕЛЬ «ХИЖАК-ЖЕРТВА» БЕЗ ВРАХУВАННЯ ВІКОВОЇ СТРУКТУРИ

Гаркуша Н.І.

Пропонована доповідь присвячена аналізу однієї математичної моделі динаміки екологічних процесів з використанням диференційно-різницевих рівнянь з післядією при деяких обмеженнях. Щільність певного виду, тобто число особин на одиницю площі, може бути повністю описана за допомогою однієї змінної, якщо нехтувати віковими, статевими та генетичними відмінностями. Зміни щільності можуть бути адекватно описані детермінантними рівняннями.

Якщо результати взаємодії в межах виду і між видами відбуваються миттєво, то модель може бути представлена системою двох диференційних рівнянь виду

$$\dot{x}(t) = ax(t) - bx^2(t) - cx(t)y(t),\ \dot{y}(t) = ey(t) - f\frac{y^2(t)}{x(t)}.$$

Рівняння для «жертви» ідентично рівнянню В. Вольтера з демпфуючим елементом. Рівняння для «хижака» подібне логістичному рівнянню. Якщо враховувати міжвидове запізнювання (час статевого дозрівання), то модель має вигляд системи з запізненням

$$\dot{x}(t) = ax(t) - bx^2(t) - cx(t-\tau)y(t-\tau),\ \dot{y}(t) = ey(t) - f\frac{y^2(t-\tau)}{x(t-\tau)}.$$

Проведено якісне дослідження отриманих систем. Особливі точки визначаються системою рівнянь

$$ax - bx^2 - cxy = 0,\ ey - f\frac{y^2}{x} = 0.$$

Очевидно, що точка, $O_1(0,0)$ відповідає відсутності популяцій і не представляє інтерес. Друга особлива точка $O_2(x_2, y_2)$, лежить в першому квадранті

$$O_2(x_2, y_2).\ x_2 = \frac{af}{bf + ce},\ y_2 = \frac{ae}{bf + ce}.$$

Її дослідження показує, що становище рівноваги, розташоване в першому квадранті, завжди є асимптотично стійким.

Як відомо, необхідною умовою стійкості системи з запізненням є асимптотична стійкість системи без запізнення. Однак характеристичний квазіполіном має зліченне число коренів, і їх дослідження пов’язане зі значними труднощами. Тому для отримання умов стійкості системи з запізненням використовується другий метод Ляпунова. Функція Ляпунова береться у вигляді квадратичної форми $V(\xi, \eta) = h_{11}\xi^2 + 2h_{12}\xi\eta + h_{22}\eta^2$. Отримано достатні умови асимптотичної стійкості, обчислені параметри збіжності.

Джалладова І.А., д.ф.м.н., професор
Київський національний економічний університет імені Вадима Гетьмана, Київ, Україна,
e-mail: idzhalladova@gmail.com

CONTROLLABILITY OF DYNAMICAL SYSTEMS: THREAT MODELS AND CYBER SECURITY

Dzhalladova I.A.,

We study controllability and stability properties of dynamical systems when actuator or sensor signals are under attack. We formulate a detailed adversary model that considers different levels of privilege for the attacker such as read and write accesss to information flows. We then study the impact of these attacks and propose reactive countermeasures based on game theory.

The security of cyber-physical control systems has received significant attention in the last couple of years [1,2]. The primary line of defense for any system are its proactive security mechanisms. Therefore, in practice we must use the threat model to identify the most valuable targest for an adversary and invest in protecting them.

If an attack is detected, the defender can respond with different actions. Some of the possible responses include reconfiguration of the system, attack isolation, of even a system shutdown (for safety reasons). In this work we are interested in defenses that respond to attacks by changes in their control actions; thus creating a game-theory problem where the actions on the players are the control signals each of them has assess to. In particular, we assume that if the system is not under attack, the system will operate with a vanilla control signal $u(t)$; however, when the system detects an attack, in chages to a reactive control signal $u_s(t)$ to maintain the system under the best possible conditions. This creates a differential game between the defender and the attacker. We use a recept model for data integrity attacks in demand-response programs for the smart grid [3]. The model considers actuator attacks as an aggregate effect for multi-agent systems that all receive the same input control signal.

The system can be modeled as a scalar differential equation where p denotes the probability of agents receiving the real pricing signal, and $1-p$ denotes the probability of compromised agents that receive a take u_a the attack signal

$$\dot{x} = cx + pbu_d + (1-p)bu_c,\ x(0) = x_0.$$

As discussed before, we consider a game between a defender that wants to minimize a utility penalizing the deviation of x from the steady state 0 and the amount of control (the additional price of electricity u_d)

$$J_d(x,u_d) = \frac{1}{2}\int_0^T \left[\gamma x^2(t) + \beta(u_d(t))^2\right]dt.$$

And the attacker that wants to maximize the state trajectory deviation from the target subject with the minimum amount of effort

$$J_c(x,u_c) = \frac{1}{2}\int_0^T \left[-\gamma x^2(t) + \beta(u_c(t))^2\right]dt.$$

In general, parameters γ and β for the objectives of the attacker and the defended can be different, bat we assume they are the same to simplify notation.

We consider open-loop solutions. To find the necessary conditions for optimality of the game (a Nash equilibrium between the two players) we need to use Pontryagin's minimum principle.

Reference

1. Amin, S., Schwartz, G.A., Shankar Sastry.: Security of interdepended and identical networked control systems. Automatic a (2012)

2. Pasqualetti,: Secure control systems: A control-theoretic approach to cyber-physical security. Ph.D. dissertation, University of California (2012)

3.Tan, R., Krishna, V.B., Yau, D.K., Kalbarczyk, Z.: Impact of integrity attacks on real-time pricing in smart grids. In: ACM Computer and Communications Security (CCS) (2013)

Дзюбановська Наталія Володимирівна, викладач кафедри економіко-математичних методів,
Тернопільський національний економічний університет, Тернопіль, Україна,
e-mail: dzyubanovska.n@mail.ru

МОДЕЛЮВАННЯ ОПТИМАЛЬНИХ СТРАТЕГІЙ РИЗИК-МЕНЕДЖМЕНТУ КРЕДИТНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ БАНКУ

Дзюбановська Н. В.

Ефективність ризик-менеджменту кредитної діяльності банку впливає на величину прибутку і розмір можливих збитків, що й зумовлює актуальність проблеми адекватної оцінки ризику і управління ним, забезпечуючи при цьому оптимальні значення показників основних результатів діяльності. Збільшення прибутковості кредитних операцій супроводжується збільшенням їх ризикованості [1].

Величину чистого прибутку банку за період t представимо у вигляді:

$$P(t)=\sum_{i=1}^{I(t)} D_i(t)-\sum_{i=1}^{I(t)} V_i(t)-V_0(t), \qquad (1)$$

де $P(t)$ – величина чистого прибутку за період t; $D_i(t)$ – дохід при здійсненні i-го виду діяльності за період t; $V_i(t)$ – витрати від виникнення ризикованих ситуацій у i-му виді діяльності за період t; $V_0(t)$ – умовно-постійні витрати; $I(t)$– к-сть видів кредитів за період t.

Виділимо дві основні стратегії ризик-менеджменту кредитної діяльності. Перша стратегія передбачає максимізацію прибутку P при обмеженні ризику R, попередньо встановивши максимально допустиме його значення $R_{опт.}+\Delta R$ (де $R_{опт.}=\min\{R\}$– оптимальне значення ризику; ΔR – допустиме відхилення величини ризику) [2]:

$$\begin{aligned} &P \to \max \\ &R \le R_{опт.}+\Delta R \end{aligned} \qquad (2)$$

Витрати від виникнення ризикованих ситуацій $V_i(t)$ та умовно-постійні витрати банку $V_0(t)$ обмежені заданим допустимим рівнем ризику, тому модель (2) можна записати як:

$$\sum_{i=1}^{I(t)} D_i(t) \to \max, \qquad (3)$$

$$\sum_{i=1}^{I(t)} R_i(t) \le R_{опт.}+\Delta R=\sum_{i=1}^{I(t)} V_i(t)+V_0(t), \qquad (4)$$

де $R_i(t)$ – величина ризику при здійсненні банком i-ого виду кредитної діяльності у період t.

Дана модель використовується банками, стратегічними цілями яких є нарощування прибутковості, проте вона є недостатньо ефективною в умовах підвищеного ризику.

Друга стратегія передбачає мінімізацію ризику R при утриманні прибутку на рівні $P_{опт.}-\Delta P$ (де $P_{опт.}=\max\{P\}$– оптимальне значення прибутку; ΔP – допустиме відхилення величини прибутку):

$$\begin{aligned} &R \to \min \\ &P \ge P_{опт.}-\Delta P \end{aligned} \qquad (5)$$

Остання модель використовується за умов непевної фінансової ситуації, в якій такий підхід забезпечує стабільний прибуток банку при мінімальному ризику.

1. Васюренко О. В. Банківський менеджмент : посібник. – К. : Видавничий центр «Академія», – 2001. – 320 с.

2. Примостка Л. О. Фінансовий менеджмент банку : підручник. – 2-ге вид., доп. і перероб. – К. : КНЕУ, 2004. – 468 с.

Кожаметов Абат Турсумуратович, кандидат физ.-мат. наук, доцент
Кафедра Высшей математики Нукусского филиала ТУИТ.
Email: elmur_bes@umail.uz
КутлымуратовЮ.
Нукусский филиал Ташкентского университета информационных технологий

ЭКОЛОГО-ЭКОНОМИЧЕСКАЯ МОДЕЛ ЗАДАЧИ РАЗМЕЩЕНИЯ И СПЕЦИАЛИЗАЦИИ СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННОГО ПРОИЗВОДСТВА ПРИ ДЕФИЦИТА ВОДНОГО РЕСУРСА

Кожаметов А. , Кутлымуратов Ю.

Оптимизация проблемы размещения и специализации сельскохозяйственного производства с учётом рационального использования природных ресурсов является сложной, многогранной и актуальной проблемой. Большой класс проблем эколого-экономического развития региона моделируется многокритериальной задачей, у которой часть критерия носит экономический, а другая часть экологический характер.

В работе [1] был рассмотрен эколого-экономическая модель размещения и специализации сельскохозяйственного производства, в частности целевых критериев максимума объема производимой продукции и минимума водопотребления.

В данной работе рассматривается двухкритериальная эколого-экономическая модель размещения и специализации сельскохозяйственного производства в частности максимума прибыли и минимума водопотребления.

Теперь переходим к изложению самой задачи. Необходимо определить распределение площадей по району под сельскохозяйственные культуры с учетом ограничений на производства продукции животноводства, на материальные ресурсы, на балансы продукции и кормов и на экологические ресурсы. При этом требуется, что ожидаемый прибыль производимой продукции растениеводства и животноводства был максимален, а суммарный объем водопотребление был минимален.

Сформулируем двухкритериальную эколого-экономическую модель размещения и специализации сельскохозяйственного производства в следующем виде.

$$F_1(x,z)=\sum_{i\in I}\sum_{j\in J_1^i}\sum_{k\in K_i}\beta_{ijk}x_{ijk}+\sum_{i\in I}\sum_{\nu\in J_2^i}\overline{\beta}_{i\nu}z_{i\nu}\to\min \tag{1}$$

(минимум водопотребление)

$$F_2(x,z)=\sum_{i\in I}\sum_{j\in J_1^i}\sum_{k\in K_i}p_{ijk}a_{ijk}x_{ijk}+\sum_{i\in I}\sum_{\nu\in J_2^i}\overline{p}_{i\nu}z_{i\nu}\to\max \tag{2}$$

(максимум прибыли)

$$\sum_{i\in I}\sum_{k\in K_i}a_{ijk}x_{ijk}-\sum_{i\in I}y_{ij}\ge A_j\quad(j\in J_1^i) \tag{3}$$

(производство растениеводческой продукции)

$$\sum_{i\in I}z_{i\nu}\ge B_\nu,\ \nu\in J_2^i \tag{4}$$

(производство животноводческой продукции)

$$\sum_{j\in J_1^i}b_{ij}^k x_{ij}-\sum_{j\in J_1^i}q_{ij}^k y_{ij}+\sum_{\nu\in J_2^i}d_{i\nu}^k z_{i\nu}\le T_i^k\ ,i\in I,k\in\overline{1,L} \tag{5}$$

(ресурсные ограничения)

$$x_{ijk}\ge 0,y_{ij}\ge 0,z_{i\nu}\ge 0,\ (i\in I,\ j\in J_1^i,\nu\in J_2^i,k\in K) \tag{6}$$

(естественные ограничения)

Для решения задачи (1)-(6) приведем её к однокритериальной задаче. Для этого введем параметры $\lambda_1\ge 0,\lambda_2\ge 0,\ \lambda_1+\lambda_2=1$ и составим комплексный критерий (линейную свертку критериев (1)-(2)):

$$\Phi_1(x,z,\lambda_1,\lambda_2) = -\lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2 = -\lambda_1 \sum_{i\in I}\sum_{j\in J_1^i}\sum_{k\in K_i} \beta_{ijk} x_{ijk} -$$
$$-\lambda_1 \sum_{i\in I}\sum_{\nu\in J_2^i} \overline{\beta}_{i\nu} z_{i\nu} + \lambda_2 \sum_{i\in I}\sum_{j\in J_1^i}\sum_{k\in K_i} p_{ijk} a_{ijk} x_{ijk} + \lambda_2 \sum_{i\in I}\sum_{\nu\in J_2^i} \overline{p}_{i\nu} z_{i\nu} \to \max \quad (7)$$

при ограничениях (3)-(6).

Приводится качественный анализ для задачи (7),(3)-(6) [2].

1. Н.У.Утеулиев, Ш.А.Бурханов, Ю.К.Кутлымуратов «Об одном двухкритериальной детерминированной эколого-экономической модели размещения и специализации сельскохозяйственного производства» Вопросы моделирование и информатизации экономики. ISSN 0134-6245 Выпуск 18. Ташкент 1999 г. Ст.46-53.

2. Зуховицкий С.И., Авдиева А.И. Линейное и выпуклое программирование.–М.: Наука, 1967.-460 с.

Коляда Юрій Васильович, кандидат фіз.-мат. наук, доцент,
Київський національний економічний університет імені Вадима Гетьмана, Київ, Україна
Трохановський Владислав Ігорович, асистент кафедри економіко–математичного моделювання
Київський національний економічний університет імені Вадима Гетьмана, Київ, Україна
e-mail:helloman@ukr.net

ДИНАМІЧНА МОДЕЛЬ ЕКОНОМІКИ ПРИ СТАЛОСТІ ВИРОБНИЧИХ ПОТУЖНОСТЕЙ

Коляда Ю.В., Трохановський В.І.

Для такого випадку динамічна модель [1] набуває вигляду

$$\begin{cases} \dot{Q} = -Q + Qp \\ \delta\dot{p} = (p_в - p) - Q^2 p, \end{cases} \qquad (1)$$

де змінні Q і p відповідають платоспроможному попиту членів суспільства і діючому рівню цін, $\dot{Q}$ і $\dot{p}$ – їх похідні з плином часу; величина $p_в$ – керуючий параметр (купівельна спроможність); скаляр δ описує ступінь змінюваності ціни (її темпосвіт).

Здійснений за допомогою пакета Mathcadобчислювальний експеримент над динамічною моделлю (1) показав наступне. Для невеликих значень стартових умов економічного процесу (початкових умов для економіко-математичної моделі) та зростанні керуючого параметра $p_в$і скаляра δ спостерігається якісно однаково поведінка інтегральних кривих, а саме: на початку процедури моделювання крива ціни$p(t)$ робить скачок, а потім монотонно спадає; в цей же час крива попиту$Q(t)$ монотонно зростає (рис. 1).

Коли початкова умова має значні числові значення $([5;6]^T)$, а параметри динамічної моделі (1) є незмінні, то спостерігається інша поведінка інтегральних кривих: графік попиту монотонно і повільно спадає; в той же час графік ціни стрімко падає на початку моделювання, а потім дуже повільно зростає (рис. 3).

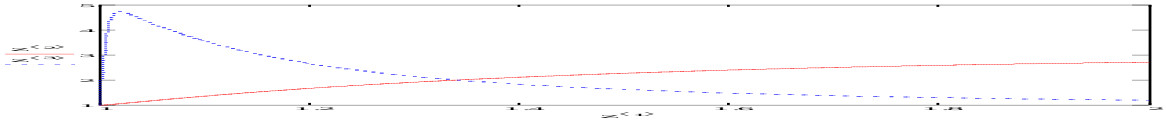


Рис. 1. Графіки інтегральних кривих: $Z^{<2>}$ – попиту; $Z^{<3>}$– ціни з плином часу$Z^{<1>}$ для $p_в = 10$, $\delta = 0.01$і початкової умови$[1;1]^T$.

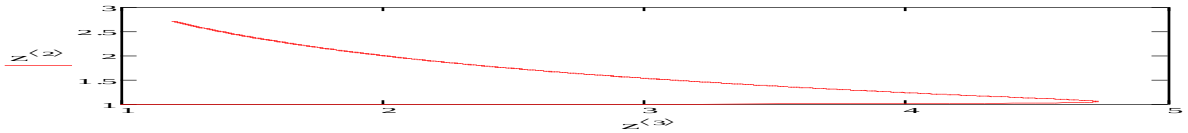


Рис. 2. Фазовий портрет – залежність попиту від ціни для динамічної моделі (1).

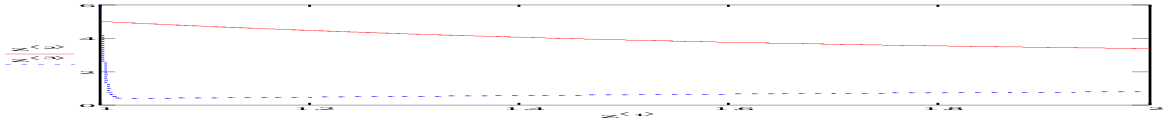


Рис.3. Поведінка інтегральних кривих для початкової умови$[5;6]^T$.

1. Олємской О.І. Синергетична модель економічної структури суспільства / О.І. Олємской, О.В. Ющенко, С.В. Кохан // Журн. фіз. досліджень. – 2004.–т. 8.– №3.– с. 268-278.

Кулян Віктор Романович, кандидат технічних наук, доцент,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
e-mail: v.kulyan@gmail.com;
Юнькова Олена Олександрівна, кандидат фізико-математичних наук, доцент,
Київський національний економічний університет імені Вадима Гетьмана, Київ, Україна,
e-mail: olenaunkova@gmail.com

ІДЕНТИФІКАЦІЯ ПАРАМЕТРІВ МОДЕЛЕЙ ДИНАМІКИ АКТИВІВ

Кулян В.Р., Юнькова О.О.

Розглядається проблема ідентифікації параметрів математичних моделей динамічних систем, які можуть бути описані звичайними диференціальними рівняннями і системами таких рівнянь. На прикладі моделей динамічного формування ринкової вартості однієї акції та портфеля цінних паперів однорідної структури розроблено алгоритми побудови оптимальних значень параметрів таких моделей. Алгоритми ідентифікації та оптимізації параметрів ґрунтуються на ітераційних процедурах, які дозволяють на кожному кроці формувати "кращі" з точки зору вибраних критеріїв якості значення параметрів моделі. Прикладна специфіка задач вимагає розробки математичних методів і алгоритмів, які б дозволяли отримувати гарантовані фінансові результати інвестиційної діяльності. Такі оцінки будуються у класі еліпсоїдальних множин.

Математичні задачі формулюються для моделей динаміки ринкової вартості однієї акції та портфеля акцій, які у загальному вигляді можуть бути записані так

$$\dot{r}_i = \frac{dr_i}{dt} = f(r_i, t, \alpha),\ r_i(t_0) = r_0,\ t \in [t_0, T],\ i = \overline{1,n} \qquad (1)$$

і

$$\dot{r}_p = f^p(r_p, x_i, \dot{x}_i, r_i, \dot{r}_i, t) \qquad (2)$$

відповідно, та є заданими параметрично. Тут r_i – очікувана ринкова вартість акції; r_p – очікувана ринкова вартість інвестиційного портфеля; x_i – частка акцій i – того виду у портфелі; t – час.

Задачею, розв'язок якої використовується для коректного формулювання проблеми оптимального інвестування і диверсифікації інвестиційного портфеля, є ідентифікація оптимальних значень параметрів $\alpha_1, \alpha_{2,} \rho_{ij}$ математичних моделей формування ринкової вартості однієї акції [1] та портфеля акцій [2].

Наведені у дослідженні математичні методи і алгоритми параметричної та гарантованої множинної ідентифікації дають можливість для динамічних математичних моделей однієї акції та портфеля акцій розв'язати задачі пошуку оптимальних значень параметрів. На їх основі будуються допустима та ефективна множини інвестиційних портфелів, які дають можливість визначити траєкторії ринкової вартості акції на основі математичної моделі (1) та оптимально диверсифікувати інвестиційний портфель ризикованих цінних паперів на основі моделі (2).

1. Fedir G. Garashchenko, Viktor R. Kulian, Vladislava V. Rutitskaya Modelling and Analysis of Investment Trends. // JournalofAutomationandInformation. –NewYork, Connecticut/ -2011. –v. 43, issue 12, -P.48-58.

2. Гаращенко Ф.Г., Кулян В.Р., Рутицька В.В. Застосування методів практичної стійкості для розв'язування задач інвестиційного менеджменту. // Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки.-Випуск 3. -2005р. -С.232-239.

Ляшенко Олена Ігорівна, докторекон. наук, професор,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
e-mail: lyashenko@univ.kiev.ua

МОДЕЛІ ЕКОНОМІЧНОГО ЗРОСТАННЯ З НАВЧАННЯМ НА ВЛАСНОМУ ДОСВІДІ

Ляшенко О.І.

Ряд авторів – Frankel (1962), Griliches (1979), Romer (1980), Lucas (1988) – побудували моделі ендогенного зростання, в яких центральну роль відіграють ефекти розповсюдження знань (досвіду). Фірма, що збільшує обсяг свого фізичного капіталу, одночасно дізнається, як виробляти більш ефективно. Такий вплив досвіду на продуктивність називається навчанням на власному досвіді або навчанням на власних інвестиціях.

Розглянемо для фірми i неокласичну виробничу функцію з трудоінтенсивною технологією:

$$Y_i = F\left(K_i, A_i L_i\right), \tag{1}$$

де K_i та L_i - звичайні ресурси (капітал та праця), A_i - індекс знань, доступних даній фірмі.

Припустимо, що параметр продуктивності фірми A_i залежить від середньої в економіці капіталоозброєності K/L (K – агрегований фізичний капітал, L – агрегована праця). В роботі Barro (2010) запропонована і досліджена модель, що ґрунтується на виробничій функції Кобба-Дугласа. У даній роботі розглядається та досліджується модель з неокласичною виробничою функцією

$$Y_i = F\left(K_i, (K/L)^{\lambda} L_i\right), \quad \lambda > 0. \tag{2}$$

Введемо нові змінні на одну людину $\frac{Y_i}{L_i} = y_i$, $\frac{K_i}{L_i} = k_i$, $\frac{K}{L} = k$. Прибуток фірми може бути записаний у вигляді

$$\pi_i = L_i\left[F\left(k_i, k^{\lambda}\right) - (r+\delta)k_i - w\right], \tag{3}$$

де $r+\delta$ - ціна оренди капіталу, w– заробітна плата. Вважаємо фірми достатньо малими, так що вплив кожної з них на агреговані величини K та L малий, а отже K та L можна вважати заданими екзогенно. Виходячи з задачі максимізації прибутку та умов рівноваги з нульовим прибутком, одержуємо необхідні умови оптимуму

$$\frac{\partial F\left(k_i, k^{\lambda}\right)}{\partial k_i} = r + \delta, \quad \frac{F\left(k_i, k^{\lambda}\right)}{k_i} - k_i \frac{\partial F\left(k_i, k^{\lambda}\right)}{\partial k_i} = w. \tag{4}$$

У рівновазі всі фірми знаходяться в однакових умовах, так що справедливі рівності $k_i = k$, $K = kL$. Оскільки $F\left(k_i, k^{\lambda}\right)$ однорідна функція відносно k_i та k^{λ}, то можна записати середній та граничний продукти у вигляді

$$\frac{F\left(k_i, k^{\lambda}\right)}{k_i} = \varphi\left(k^{\lambda-1}\right), \quad \frac{\partial F\left(k_i, k^{\lambda}\right)}{\partial k_i} = \varphi\left(k^{\lambda-1}\right) - k^{\lambda-1}\varphi'\left(k^{\lambda-1}\right). \tag{5}$$

Отже, граничний продукт менший від середнього продукту $\varphi\left(k^{\lambda-1}\right)$ і залежить від k. При цьому середній продукт збільшується при $\lambda > 1$, залишається константою при $\lambda = 1$ та зменшується (прямує до нуля) при $0 < \lambda < 1$. Більш детальний аналіз моделі пов'язуєтьсяз дослідженням відповідної задачі оптимального керування.

Матвієнко Володимир Тихонович, кандидат фіз.-мат. наук, доцент
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
e-mail: matvienko.vt@gmail.com

ОПТИМІЗАЦІЯ ТЕРМІНАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ ДЛЯ ДИСКРЕТНИХ СИСТЕМ

Матвієнко В.Т.

Задача керування по переводу системи керування з початкової точки фазового стану у фінальний стан є основною задачею теорії керування (задача термінального керування). У разі системи керування з дискретним аргументом для цієї задачі описано повну множину її розв'язків. Цікавішим з практичної точки зору є задача оптимального переводу початкового стану динамічної системи у фінальний стан.

Розглянемо для цілком керованої дискретної системи керування задачу термінального керування, що переводить систему

$$x(i+1) = A(i)x(i) + B(i)u(i),\ i = 0,1,2,\ \ldots,\ N \tag{1}$$

з початкового стану $x(0) = 0$ в кінцевий стан $x(N+1) = x_{(1)}$ і при цьому мінімізується наступний критерій якості

$$I(\upsilon) = \sum_{i=1}^{l} \left(x(k_i) - \bar{x}(k_i)\right)^T F(k_i)\left(x(k_i) - \bar{x}(k_i)\right). \tag{2}$$

Тут $F(k_i)$ – симетричні вагові матриці розмірності $n \times n$, наперед задані вектори $\bar{x}(k_i)$ розмірності n, $k_1 < k_2 < k_3 < \ldots < k_l$, υ – вектор довільних параметрів розмірності $m(N+1)$. Ця постановка задачі дозволяє визначити оптимальне термінальне керування, при цьому траєкторія системи (1) проходитиме найближче до наперед заданих точок $\bar{x}(k_i)$, $i = 1,2,\ldots,l$.

Записавши необхідні умови мінімуму критерію (2), одержимо систему алгебраїчних рівнянь для визначення вектора параметрів $\upsilon^T = \left(\upsilon^T(0), \upsilon^T(1), \ldots, \upsilon^T(N)\right)$,

$$Q\upsilon = d. \tag{3}$$

Елементи матриці Q і вектора $d^T = \left(d^T(0), d^T(1), \ldots, d^T(N)\right)$ при цьому мають наступний вигляд

$$d(k) = \sum_{i=1}^{l} \left\{ \left[W^T(k_i,k) - W^T(N+1,k)\left(WW^T\right)^+ \sum_{j=0}^{k_i-1} W(N+1,j) \right] F(k_i) \times \right.$$
$$\left. \times \left[\bar{x}(k_i) - \sum_{j=0}^{k_i-1} W(k_i,j) W^T(N+1,j)\left(WW^T\right)^+ x_{(1)} \right] \right\}, \qquad k = 0,1,2,\ldots,N,\ W(i,j) = 0$$

при $j \geq i$, елементи матриці Q наступного вигляду

$$q_{pk} = \sum_{i=1}^{l} \left\{ \left[W^T(k_i,k) - W^T(N+1,k)\left(WW^T\right)^+ \sum_{j=0}^{k_i-1} W(N+1,j) \right] F(k_i) \times \right.$$
$$\left. \times \left[W(k_i,p) - \sum_{j=0}^{k_i-1} W(k_i,j) W^T(N+1,j)\left(WW^T\right)^+ W(N+1,p) \right] \right\}, \qquad p = 0,1,\ldots,N,$$
$$k = 0,1,2,\ldots,N,\ W(i,j) = 0 \text{ при } j \geq i.$$

Одержано оптимальний розв'язок задачі термінального керування з дискретним аргументом, при цьому траєкторія системи проходитиме найближче до наперед заданих точок. Знайдений розв'язок дозволяє розв'язати ряд практичних задач з обмеженнями на траєкторії.

Махорт Андрій Пилипович, кандидат фіз.-мат. наук,старший науковий співробітник,
Інститут теоретичної фізики ім. М.М. Боголюбова НАНУ, Київ, Україна,
e-mail: map@bitp.kiev.ua

ПРО ВПЛИВ НА РІВНОВАГУ ЕКОНОМІЧНОЇ СИСТЕМИ НАЯВНОСТІ ДОДАТКОВОГО ПЕРЕРОЗПОДІЛУ ФІНАНСОВИХ РЕСУРСІВ

Махорт А.П.

Як об’єкт економічна система разом з окремими її складовими описується набором характеристик одні з яких є постійними протягом певного періоду часу і задають структуру економічної системи, інші в цьому ж періоді часу змінюються і слугують індикатором її поточного стану. Такі змінні економічні характеристики можна визначити, ґрунтуючись на засадах рівноваги. Функціонування суб'єктів економічної системи відбувається завдяки надходженню фінансових ресурсів. Виробники продукують товари в обсягах $x = \{x_k\}_{k=1}^n$. Ціни ж на товари $p = \{p_k\}_{k=1}^n$ утворюється в результаті встановлення рівноваги.

В процесі функціонування економічної системи між її суб’єктами можуть виникати взаємні фінансові зобов’язання. Врахуємо наявність таких зобов’язань за допомогою введення додаткового доданку у виразі для прибутку суб’єктів економічної системи

$$\widetilde{D}_k(p,x) + D_k, \quad k = \overline{1,n}.$$

Структуру споживання n типів товарів l споживачами в економічній системі можна задати за допомогою матриці попиту $\|c_{kj}\|_{k=1,\,j=1}^{n,\;l}$. Припускається, що фінансові зобов’язання передбачають або ж додаткові надходження капіталу або ж додаткові витрати. Фактично відбуватиметься певний перерозподіл фінансових ресурсів. В зв’язку з цим споживчі плани суб’єктів економічної системи, задані елементами матриці попиту, можуть зазнавати змін. Врахуємо залежність від величин $D = \{D_k\}_{k=1}^n$ матричних елементів $c_{kj} = \widetilde{f}_k(D)c_{kj}^0$. На підставі припущення про наявність різного характеру фінансових зобов’язань вважатимемо, що вектор D може містити як додатні, так і від’ємні компоненти. Але функції $\{\widetilde{f}_k(D)\}_{k=1}^n$ мають бути принаймні невід'ємними. А відповідно до економічних міркувань вони також мали б бути зростаючими функціями по аргументу D_k, якщо D_k додатна величина, або ж спадними по D_k, якщо значення D_k від'ємні.

Рівновага економічної системи з такими характеристиками, сенс якої полягає у вимозі щоб пропозиція Ψ_k перевищувала попит Φ_k на $k-$й товар, матиме вигляд

$$\Phi_k = \frac{1}{p_k}\sum_{i=1}^{l}\frac{c_{ki}^0\,\widetilde{f}_k(D)\,p_k}{\sum_{s=1}^{n}c_{si}^0\,\widetilde{f}_s(D)\,p_s}\left(\widetilde{D}_i(p,x)+D_i\right) \le \Psi_k, \qquad k=\overline{1,n}.$$

Розглядалася наявність монополістів в економічній системі та ненасичуваних споживачів. За допомогою умови рівноваги можна з'ясувати вплив додаткових фінансових надходжень або витрат на значення основних характеристик економічної системи, які визначатимуть поточний стан рівноваги. Враховується і важливий чинник, пов'язаний з залежністю формування споживчих інтересів суб’єктів економічної системи від зміни їх фінансового становища, що моделюється за допомогою сукупності функцій $\{\widetilde{f}_k(D)\}_{k=1}^n$. Знайдено обмеження на задані характеристики, зокрема на компоненти вектора D, за виконання яких в економічній системі встановлюватиметься рівновага.

Олійник Андрій Петрович, доктор технічних наук, професор кафедри математичного моделювання в інженерії
Івано-Франківський національно-технічний університет нафти і газу, Івано-Франківськ, Україна,
e-mail: andrij-olijnyk@rambler.ru,
Клапоущак Оксана Ігорівна, асистент кафедри комп'ютерних технологій в системах управління та автоматика,
Івано-Франківський національно-технічний університет нафти і газу, Івано-Франківськ, Україна
e-mail: oksana_kl@meta.ua

ДО ПЕРЕВІРКИ АДЕКВАТНОСТІ ПРОГНОСТИЧНОЇ МОДЕЛІ ЗА КРИТЕРІЄМ ПІРСОНА

Олійник А.П., Клапоущак О.І.

Розроблено математичну прогностичну модель розвитку паводкових явищ, встановлено різні варіанти закону розвитку паводку у вигляді емпіричних залежностей та звичайного диференціального рівняння $y' = (\frac{n}{t} - a)y$, де n, a – емпіричні коефіцієнти, t –час, y – рівень паводку [1].

Перевірку адекватності запропонованої прогностичної моделі за критерієм Пірсона $\chi^2_{eks.}$ здійснено також на основі статичних даних про рівень води ріки Латориця [2].

$$\chi^2_{eks.} = \sum_{j=1}^{N} \frac{(f_i - \tilde{f}_i)^2}{\tilde{f}_i}, \qquad (1)$$

де $\tilde{f}_i$ – дані отримані на виході моделі; f_i – статистичні дані.

Якщо $\chi^2_{eks.} < \chi^2_{teor.}$, то рівень надійності запропонованої математичної моделі є задовільним. $\chi^2_{teor.}$ та задається параметрами входу: α – рівень значимості і степеня свободи, $r = k - m$, де $k = N$, $m = 2$, оскільки в емпіричних залежностях є два незалежні параметри. $\chi^2_{teor.}$ одержується з таблиці розподілу $\chi^2_{teor.}(\alpha, r)$ і становить при цьому 19,68 при рівні значимості 0,05 і $r = 15$, при $r = 13 - 22, 26$.

Здійснивши розрахунки за формулою (1), встановлено, що $\chi^2_{eks.}$ для ріки Латориця – пост Мукачево (10.05.-31.05.2013 р.) та Мукачево (12.05.-13.05.2014 р.) становлять 0,041367 та 2,7266 відповідно і є меншим за $\chi^2_{teor.}$. Це свідчить про адекватність запропонованої прогностичної моделі.

Наведені результати встановлення адекватності запропонованої моделі та точності прогнозування на прикладах басейну ріки Латориця – пост Мукачево вказують на можливість застосування даного підходу до моделювання розвитку паводкових вод за умови наявності достатнього об'єму статистичних даних, що дозволить виділити контрольну вибірку для оцінки точності прогнозу.

1. Zamikhovskii L.M., Oliinyk A.P., Klapoushchak O.I., Shtaiyer L.O. The flood process mathematical modelling an their prediction methods based on static data. *Life Sci Journal*, 2014;11(8s):473-477] (ISSN:1097-8135).

2. Український гідрометеорологічний центр [Електронний ресурс]: Автоматичні гідрологічні станції / Офіційний сайт – http://hydro.meteo.gov.ua/

Стефанишина-Гаврилюк Юлія Дмитрівна, аспірант,
Інститут телекомунікацій і глобального інформаційного простору НАН України, Київ, Україна,
E-mail: stefanishina@yahoo.com
Стефанишин Дмитро Володимирович, доктор техн. наук, пров. н. с.,
Інститут телекомунікацій і глобального інформаційного простору НАН України, Київ, Україна,
E-mail: dvstefanyshyn@yahoo.com

СИТУАЦІЙНО-ІНДУКТИВНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ЗА ДАНИМИ РЯДІВ ДИНАМІКИ

Стефанишина-Гаврилюк Ю.Д., Стефанишин Д.В.

Пропонується метод моделювання за даними рядів динаміки, що ґрунтується на побудові ситуаційних і індуктивних моделей регресійного типу.

Під ситуаційною моделлюрозуміється модель, адаптована до певної ситуації (прогнозного фону) і яка є адекватною лише для цієї ситуації. Прогнозний фон характеризується як сукупність зовнішніх і внутрішніх умов, істотних для вибору структури і коефіцієнтів моделі. Ситуаційні моделі будуються на основі рядів актуальних (фактичних) даних рядів динаміки – фізичних даних, отриманих в результаті спостережень, вимірювань тощо, і, по суті, відображають окремі фазові стани динамічної системи на різних інтервалах часу. При цьому перехід від однієї ситуаційної моделі до іншої, які визначають сусідні фазові стани динамічної системи, може відбуватися немонотонно (стрибкоподібно) [1].

В якості ситуаційних моделей можуть використовуватися прості, однофакторні регресії, які будуються на вибіркових рядах динаміки, що характеризуються монотонністю (або квазістаціонарністю) на відповідних часових інтервалах (однорідністю прогнозного фону). Результати ситуаційного моделювання (модельні дані) формують підставу для наступної побудови індуктивних моделей, де під індуктивною моделлю розуміється модель, отримана з узагальнення (ансамблю) кількох ситуаційних моделей. Індуктивна модель, яка будується на основі рядів модельних даних, що являють собою результати статистичної обробки актуальних даних і/або ситуаційного моделювання, охоплює кілька кластерів актуальних даних, і, таким чином, відображає еволюцію модельних значень результуючої змінної стану динамічної системи в часі.

Загальна математична модель є сімейством індуктивних моделей як моделей «рівнів», представлених у вигляді регресій модельних значень, трендів або комбінацій трендів та регресій для залишків трендів модельних значень ендогенної змінної, що встановлюються за ситуаційними моделями минулих періодів, в тому числі, при необхідності, – від деяких похідних параметрів незалежних змінних. Допускається модифікація змінних моделі та врахування лагів. При цьому прогнозування може здійснюватися як на основі ситуаційних моделей, за допомогою яких відслідковується поведінка ендогенної змінної в межах інтервалів часу, де ситуаційні моделі є адекватними, так і на основі індуктивних моделей, за допомогою яких відслідковується еволюція ситуаційних моделей як фазових портретів минулих станів динамічної системи і можуть встановлюватися ситуаційні моделі для визначення залежної змінної для майбутніх періодів [1, 2].

1. Stefanyshyn D.V. A Method of Forecasting of Indexes of Dynamic System that evolves slowly, based on Time Series Analysis / D.V. Stefanyshyn // Proc. of 4th Int. Conf. on Inductive Modelling. Kyiv, Ukraine, September 16-20, 2013. – P.P. 221-224.

2. Стефанишина-Гаврилюк Ю.Д. Індуктивне моделювання ризиків збитків від руйнівних повеней в басейні р. Тиса за емпіричними даними з використанням моделей регресійного типу / Ю.Д. Стефанишина-Гаврилюк, Д.В. Стефанишин, О.М. Трофимчук // Математичне моделювання в економіці. – 2014. – №1. – С. 72–79.

Стешенко Григорій Миколайович, кандидат фіз.-мат. наук, старший викладач кафедри програмування та комп'ютерної техніки, факультету інформаційних технологій,
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
e-mail: gmsteshenko@gmail.com;
Верещинська Вікторія Валеріївна, старший лаборант кафедри інтелектуальних та інформаційних систем, факультету інформаційних технологій,
e-mail: viktoriafit009@gmail.com

УПРАВЛІННЯ ІНФОРМАЦІЙНИМИ ВПЛИВАМИ В СОЦІАЛЬНИХ МЕРЕЖАХ

Стешенко Г.М., Верещинська В.В.

Під терміном «соціальна мережа» будемо розуміти соціальну структуру, що складається з множини елементів мережі або агентів (суб'єктів – індивідуальних чи колективних, наприклад, індивідів, груп, організацій) і визначеній на ній множині відносин (сукупності зв'язків між агентами, наприклад, знайомства, дружби, співпраці, комунікації) [1]. Формально соціальна мережа представляє собою граф $G(N,L)$ в якому $N=\{1,2,...,n\}$ – скінченна множина вершин (агентів) та L – множина ребер, яка відображає взаємодію агентів.

В роботі досліджена наступна модель, що описує ситуацію, в якій агенти мережі самі обирають свою поведінку:

$$f_i(x_1,x_2,...,x_n)=x_i\left(\sum_{k=1}^{n}c_k x_k-\alpha\right)-\frac{x_i^2}{r_i},\ i=\overline{1,...,n}, \qquad (1)$$

$$c_i=e^{-x_i},\ i=\overline{1,...,n},$$

де $N=\{1,2,...,n\}$ скінченна множина агентів, r_i - параметр, що характеризує кожного з агентів [2], f_i - цільова функція, $x_i\in R$, $x_i>0$ дія, що обирає кожний з агентів, c_i - коефіцієнт, що характеризує протидію мережі на дію чи без дію кожного з агентів, $\alpha\in R$ - поріг для досягнення успіху в роботі агентів.

Для даної моделі була розглянута задача управління інформаційними впливами по відношенню до агентів для досягнення оптимального стану системи.

1. Губанов Д.А., Новиков Д.А., Чхартишвили А.Г. Социальные сети: модели информационного влияния, управления и противоборства. – М.: Физматлит, 2010. – 228 с.

2. Новиков Д.А. Теория управлении организационными системами. 2-е изд. – М.:Физматлит, 2007. – 584 с.

3. Nash J.F. Non-cooperative Games / Ann. Math. 1951. Vol. 54. p. 286 – 295.

4. Wright J., Leyton-Brown K. Beyond Equilibrium: Predicting Human Behavior in Normal Form Games / Proc. of Conf. Associat. Advancement of Artificial Intelligence (AAAI – 10), 2010. P. 461 – 473.

Б.Г. Чемісов,к.г.н., доцент,
Чернігівський навчально-науковий інститут економіки ЧНТУ
e-mail: b.chemisov@gmail.com

ВИЯВЛЕННЯ ФАКТОРНОЇ ОРІЄНТАЦІЇ ТЕРИТОРІАЛЬНО-ВИРОБНИЧОГО УТВОРЕННЯ

Б. Г. Чемісов

У даній роботі під територіально-виробничим утворенням (ТВУ) ми розуміємо сукупність різних підприємств, що розташовані у територіальній близькості і розвиваються на базі локального територіального поєднання природних і економічних умов та ресурсів. Визначити факторну орієнтацію ТВУ в цьому контексті - це виявити провідні (головні) для даного ТВУ умови та ресурси, в орієнтації на які вона сформувалося. Розрахунок факторної орієнтації ТВУ починається з розрахунку факторної орієнтації підприємств, які входять до його складу. Для цього використовується еталона шкала техніко-економічних показників виробництва, сполучених з використанням природних та економічних умов і ресурсів. Параметри еталонної шкали являють «порогові» величини орієнтації підприємств на використання тих чи інших умов і ресурсів. Якщо величина техніко-економічного показника перевищує значення аналогічного показника шкали, то відповідний фактор розміщення включається в число провідних для даного підприємства. Параметри еталонної шкали можуть уточнюватися в залежності від особливостей поєднання умов та ресурсів того чи іншого регіону.

Ступінь орієнтації промислового підприємства на певні фактори розвитку визначається спочатку у відносних одиницях шляхом відношення фактичних значень техніко-економічних показників даного підприємства до значень відповідних техніко-економічних показників-еталонів. Наприклад:

$$C = \frac{C_{ф}}{C_{ш}}$$

С - ступінь орієнтації підприємства на фактор сировинних ресурсів (відносноІодиниці),

$С_ф$ – фактичні витрати сировини (місцевої) на виробництво 1 тони продукції (тон),

$С_ш$ - витрати сировини на виробництво 1 тони продукціїзаеталонною шкалою (тон).

Аналогічний розрахунок здійснюється для кожного фактору. Після розрахунку факторної орієнтації підприємства у відносних одиницях здійснюється перерахунок відносних значень через чисельність промислово-виробничого персоналу цього підприємства. З цією метою чисельність промислово-виробничого персоналу кожного підприємства розподіляється пропорційно ступеня його орієнтації на кожен фактор:

$$ФП_1 = \frac{M}{\sum_{i=1}^{n} Ф_1} \times Ф_1;\ ФП_2 = \frac{M}{\sum_{i=1}^{n} Ф_2} \times Ф_2;\ \cdots\ ФП_n = \frac{M}{\sum_{i=1}^{n} Ф_n} \times Ф_n$$

$ФП_1;\ ФП_2\ \ldots\ ФП_n$ - ступінь орієнтації підприємства на певні фактори у значеннях, які виражені через чисельність промислово-виробничого персоналу; $Ф_1;\ Ф_2; Ф_3\ \ldots\ Ф_n$ - ступінь орієнтації підприємства на певні фактори, які виражені у відносних одиницях; M - чисельність промислово-виробничого персоналу підприємства.

Для кожного підприємства повинна додержуватись рівність:

$$\sum_{i=1}^{n} ФП_i = M$$

Після цих розрахунків факторна орієнтація ТВУ в цілому визначається шляхом підсумку однойменних факторних значень, які виражені через чисельність промислово-виробничого персоналу, по кожному підприємству. Потім, для порівняння та зручності аналізу факторна орієнтація ТВУ перераховується у відсотки (табл. 1).

Таблиця 1

Функціонально-територіальна структура промислового виробництва регіону

Види територіально-виробничих утворень (ТВУ)	Ранг ТПУ (тис. чол. нас.)	Кількість ТПУ (одиниць)	Чисельність ПВП (% до підсумку)	Факторна орієнтація ТВУ						
				Всі фактори	В тому числі					
					Т	ТГП	С	В	Е, ТП	П
Промислові пункти	до 3	…	1,0	100	…	…	…	…	…	…
Промислові центри		36	30,1							
дрібні	3-10	25	14,6	100,0	14,0	12,0	21,0	1,0	…	52,0
малі	10-50	11	15,5	100,0	21,0	17,0	17,0	2,0	…	43,0
Виробничі вузли		3	68,9							
- середні	50-100	2	24,4	100,0	41,0	31,0	3,0	2,0	…	23,0
промвузол М			13,2	100,0	41,0	38,0	2,0	2,0	…	18,0
промвузол Д			11,2	100,0	40,0	23,0	3,0	3,0	…	31,0
великі	100-500	1								
промвузол Ж			44,6	100,0	40,0	22,0	2,0	6,0	…	30,0
крупні	500-1000	-	-							
промислові агломерації	>1000	-	-							
Всього	X	39	100,0	X	X	X	X	X	X	X

Фактори розвитку: Т – трудових ресурсів; ТГП - транспортно-географічного положення; С – сировинних ресурсів; В – водних ресурсів; Е,ТП – електроенергетичних і паливних ресурсів; П – фактор споживання.

Плаксій Катерина Юріївна, аспірантка кафедри прикладної математики,
Національний технічний університет "ХПІ", Харків, Україна,
e-mail: plaksiyYA@rambler.ru;
Міхлін Юрій Володимирович, доктор фіз.-мат. наук, професор,
Національний технічний університет "ХПІ", Харків, Україна,
e-mail: muv@kpi.kharkov.ua.

ДОСЛІДЖЕННЯ ДИНАМІКИ НЕІДЕАЛЬНОЇ СИСТЕМИ З НЕЛІНІЙНИМ ВІБРОГАСНИКОМ В ОКОЛІ РЕЗОНАНСУ

Плаксій К.Ю., Міхлін Ю.В.

Розглядається система з неідеальним джерелом енергії та нелінійним віброгасником. Рівняння руху системи мають вигляд:

$$\begin{cases} I\ddot{\varphi} = \varepsilon(L(\dot{\varphi}) - H(\dot{\varphi}) + c_1 r(x - r\sin\varphi)\cos\varphi), \\ M\ddot{x} + \varepsilon\eta\dot{x} + cx + c_2(x-y) + \gamma(x-y)^3 = \varepsilon c_1 r\sin\varphi, \\ \varepsilon m\ddot{y} + \varepsilon\eta\dot{y} - c_2(x-y) - \gamma(x-y)^3 = 0, \end{cases} \quad (1)$$

де M – маса пружної підсистеми, m – маса віброгасника, c, c_1 та c_2 – жорсткості пружин, I – момент інерції мас, що обертаються, $H(\dot{\varphi}) = d\dot{\varphi}$ – момент сил опору обертання ротора, що заданий у вигляді лінійної функції, $L = a + b\dot{\varphi}$ – рушійний момент джерела енергії (характеристика двигуна).

Динаміка неідеальної системи (1) досліджена в умовах нестаціонарного режиму, а саме коли частота обертання ротора не є постійною величиною, у випадках зовнішніх резонансів на власних частотах та у випадку одночасного зовнішнього та внутрішнього резонансів. До системи (1) була застосована методика зведення до редукованої системи [1,2] відносно таких змінних як повна енергії системи, арктангенс відношення амплітуд та різниця фаз шуканих розв'язків в околі резонансу. Дослідження редукованої системи на положення рівноваги показало, що в околі зовнішнього резонансу з першою власною частотою спостерігається локалізація енергії системи на першій головній координаті, а в околі зовнішнього резонансу з другою власною частотою енергія системи локалізується на другій головній координаті. Отримано умови біфуркацій для випадків зовнішніх резонансів: існування зв'язаних коливань залежить від рівня енергії та параметрів системи і можливе лише для окремих значень часу. В околі таких значень рух пружної підсистеми є близьким до форми зв'язаних коливань. Такі нові режими коливань були названі перехідними формами коливань.

Встановлено, що у випадку одночасного зовнішнього та внутрішнього резонансів не спостерігається довготривалої локалізації енергії, відбувається біфуркація – з'являються дві форми зв'язаних коливань, до однієї з яких наближений рух пружної підсистеми. Існування ж локалізованих форм стає у цьому випадку залежним від рівня енергії та значень параметрів системи і можливе для одиничних значень енергії, тобто локалізовані форми для даного випадку стають перехідними формами коливань.

Отримані умови локалізації енергії на віброгаснику та проаналізовані сприятливі та несприятливі для віброгасіння випадки резонансів.

Достовірність аналітичних результатів підтверджується чисельними та чисельно-аналітичними експериментами.

1. Pilipchuk V.N. Nonlinear Dynamics: Between Linear and Impact Limits/ V.N. Pilipchuk. – Berlin: Springer-Verlag, 2010.

2. Plaksiy K.Y. Dynamics of nonlinear dissipative systems in the vicinity of resonance/ K.Y. Plaksiy, Y.V. Mikhlin // Journal of Sound and Vibration, 2015. – V.334 – p. 319-337.

Pantelyat Mykhailo Garrijovich, Cand. Sci. (Phys.–Math.), Senior Researcher,
Department for Electrical Apparatus, National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute", Kharkiv, Ukraine,
e-mail: m150462@yahoo.com

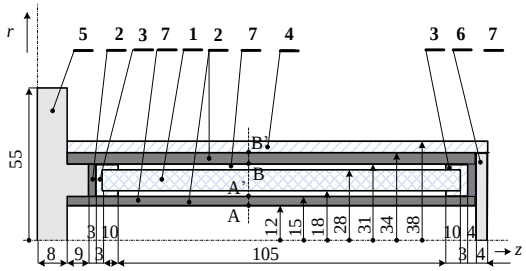
FINITE ELEMENT ANALYSIS OF 2D AND 3D MULTIPHYSICAL PROBLEMS IN ELECTRICAL ENGINEERING

Pantelyat M.G.

Fundamental basics of pure and applied research in the area of analysis and design of innovative electromagnetic devices (modern induction heaters (Fig. 1), novel thermoelastic actuators (Fig. 2), rotating electrical machines (Fig. 3), induction cookers (Fig. 4), electrophysical devices, welding machines, etc.) are developed: • general theoretical principles of coupled (multiphysical) analysis of electromagnetic devices taking into account main interactions of interrelated electromagnetic, thermal and mechanical phenomena are proposed; • an improved classification of coupled (multiphysical) phenomena and their graphical representation are developed; • a list of interrelated physical phenomena and effects to be taken into account in numerical analysis of electromagnetic devices is proposed; • a list of main parameters to be recommended as outcomes of the multiphysical numerical simulation of various electromagnetic devices from practical points of view is elaborated.

On this base: • novel effective numerical algorithms for various nonlinear problems computer simulation are proposed, validated and implemented in applied computer codes; • effective applied 2D and 3D computer codes for the Finite Element Analysis of various electromagnetic devices are written and validated; • a lot of applied problems of practical interest regarding modern electrical engineering devices are numerically solved; • investigations of the influences of various interrrelated physical phenomena (material properties temperature dependences, thermal radiation, conditions of convective heat transfer, contact phenomena, etc.) on the accuracy of the electromagnetic, thermal and structural analyses are conducted; • important practical recommendations on the choice of rational structures, materials and operation modes of electromagnetic devices under consideration are proposed and implemented in industry.

Fig. 1. Modern industrial induction heater



1 – copper field coil **4** – teflon insulation **7** – air
2 – steel shell **5** – kevlar clamp
3 – teflon clamp **6** – kevlar front

Fig. 2. Linear thermoelastic actuator

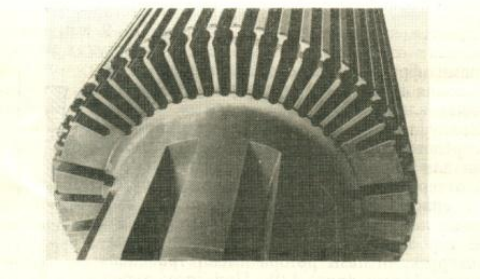


Fig. 3. Large synchronous turbogenerator rotor

Fig. 4. Induction cooker